doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.06.046

两类带两个形状参数的三角 Quasi-Bézier 曲面*

陈　军[1]　周　联[2]

（1.宁波工程学院理学院，宁波 315211；2.上海海事大学文理学院，上海 201306）

摘要：构造了两种定义在三角域上带两个形状参数的二元 Quasi-Bernstein 基函数。与之相应的两类三角 Quasi-Bézier 曲面其性质与传统的三角 Bézier 曲面相仿。当形状参数取某些特定值时，三角 Quasi-Bézier 曲面就退化为三角 Bézier 曲面。在控制顶点固定时，三角 Quasi-Bézier 曲面的外形可以通过改变形状参数的值来进行调整。两个形状参数几何意义明显，便于操作，其中一个在3条边界曲线固定后仍能够调整曲面的外形。数值实例表明了这两类三角 Quasi-Bézier 曲面在调整外形时的有效性与便捷性。

关键词：计算机辅助几何设计　二元 Quasi-Bernstein 基函数　三角 Quasi-Bézier 曲面　形状参数

中图分类号：TP391.72　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2013)06-0263-06

Two Kinds of Triangular Quasi-Bézier Surfaces with Two Shape Parameters

Chen Jun[1]　Zhou Lian[2]

(1. *Faculty of Science*, *Ningbo University of Technology*, *Ningbo* 315211, *China*

2. *Liberal Arts & Sciences College*, *Shanghai Maritime University*, *Shanghai* 201306, *China*)

Abstract: Two kinds of bivariate basis functions with two shape parameters over the triangular domain were presented. The corresponding triangular surfaces inherited the most properties of classical triangular Bézier surface, and adjusted the shape by changing the value of shape parameters with the fixed control points. When the shape parameters were equal to some specified values, the new triangular surfaces degenerated to the triangular Bézier surface. The obvious geometric significance of shape parameters made it easier for the designer to adjust the shape of new surfaces, even if when the boundaries of triangular surfaces were fixed. The numerical examples indicated that the new surfaces were valid and easy for operation.

Key words: Computer aided geometric design　Bivariate Quasi-Bernstein basis functions　Triangular Quasi-Bézier surface　Shape parameter

引言

在计算机辅助几何设计中，定义在三角域上的三角 Bézier 曲面能有效地处理结构复杂、边界不规则的几何造型问题，在实际应用中占有重要地位[1~4]。而在实际设计中，几何外形通常不是一次成型的，设计者希望保持几何外形大致不变——即控制顶点固定的情况下，仍能够对三角曲面片进行形状微调，以期获得更满意的几何外形。

为此，有学者在曲线的表达式中引入与自变量无关的形状参数，使这些带形状参数的曲线不仅具有良好的性质，还能在控制顶点固定时仍可以调整曲线形状[5~13]。所有这些曲线都能够直接利用张量积的方法，被自然地推广到矩形域上，从而生成带形状参数的张量积曲面。与张量积曲面不同，三角域上带形状参数的三角曲面并不能进行这样的推

收稿日期：2012-10-11　修回日期：2013-01-09

* 国家自然科学基金资助项目(11147199)、宁波市自然科学基金资助项目(2011A610174、2012A610029)和宁波工程学院校级科研资助项目(2010126)

作者简介：陈军，讲师，博士，主要从事计算机辅助设计、计算机图形学和数字几何处理研究，E-mail：chenjun88455579@163.com

广。目前，对三角域上带形状参数的三角曲面[13~16]的研究相对较少。

把那些带形状参数的二元多项式基函数称为二元 Quasi-Bernstein 基函数(简称为二元 Q-Bernstein 基函数)，相应的三角曲面称为三角 Quasi-Bézier 曲面(简称为三角 Q-Bézier 曲面)。文献[13~16]中三角 Q-Bézier 曲面都只带有一个形状参数(文献[16]虽然给出了带有 3 个形状参数的三角 Q-Bézier 曲面，但是当曲面满足对称性时 3 个形状参数相等，即此时只有 1 个形状参数)，调控手段相对单一。本文构造两种带 2 个形状参数的低阶三角 Q-Bézier 曲面，其中 1 个形状参数能使曲面在边界不变的前提下仍能调整曲面的外形。最后，比较这两种三角 Q-Bézier 曲面，使得设计者的选择更具针对性。

1 两种二元 Q-Bernstein 基函数和三角 Q-Bézier 曲面

已知 (u,v,w) 是三角域 $T=\Delta T_1T_2T_3$ 上的面积坐标，满足 $0\leqslant u、v、w\leqslant 1$，$u+v+w=1$。两种低阶二元 Q-Bernstein 基函数定义如下：

定义 1：当 $0<\lambda_1^{\mathrm{I}}\leqslant 4$，$0\leqslant\lambda_2^{\mathrm{I}}\leqslant 5$ 时，称函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)\}_{i+j+k=2}$ 为 2 阶 Ⅰ 型二元 Q-Bernstein 基函数，即

$$\begin{cases}
b_{0,1,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{I}}(v^3w+vw^3)+(2+\lambda_1^{\mathrm{I}})v^2w^2+\\
\qquad\lambda_2^{\mathrm{I}}(uv^2w+uvw^2)+2u^2vw\\
b_{1,0,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{I}}(u^3w+uw^3)+(2+\lambda_1^{\mathrm{I}})u^2w^2+\\
\qquad\lambda_2^{\mathrm{I}}(u^2vw+uvw^2)+2uv^2w\\
b_{1,1,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{I}}(u^3v+uv^3)+(2+\lambda_1^{\mathrm{I}})u^2v^2+\\
\qquad\lambda_2^{\mathrm{I}}(u^2vw+uv^2w)+2uvw^2\\
b_{2,0,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=u^4+(4-\lambda_1^{\mathrm{I}})(u^3v+u^3w)+\\
\qquad\dfrac{4-\lambda_1^{\mathrm{I}}}{2}(u^2v^2+u^2w^2)+(10-2\lambda_2^{\mathrm{I}})u^2vw\\
b_{0,2,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=v^4+(4-\lambda_1^{\mathrm{I}})(uv^3+v^3w)+\\
\qquad\dfrac{4-\lambda_1^{\mathrm{I}}}{2}(u^2v^2+v^2w^2)+(10-2\lambda_2^{\mathrm{I}})uv^2w\\
b_{0,0,2}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=w^4+(4-\lambda_1^{\mathrm{I}})(uw^3+vw^3)+\\
\qquad\dfrac{4-\lambda_1^{\mathrm{I}}}{2}(u^2w^2+v^2w^2)+(10-2\lambda_2^{\mathrm{I}})uvw^2
\end{cases}\tag{1}$$

定义 2：当 $0<\lambda_1^{\mathrm{II}}\leqslant 3$，$0\leqslant\lambda_2^{\mathrm{II}}\leqslant 2$ 时，称函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)\}_{i+j+k=3}$ 为 3 阶 Ⅱ 型二元 Q-Bernstein 基函数，即

$$\begin{cases}
b_{2,1,0}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}u^2v\\
b_{2,0,1}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}u^2w\\
b_{1,2,0}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}uv^2\\
b_{1,0,2}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}uw^2\\
b_{0,2,1}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}v^2w\\
b_{0,1,2}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=\lambda_1^{\mathrm{II}}vw^2\\
b_{1,1,1}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=3\lambda_2^{\mathrm{II}}uvw\\
b_{3,0,0}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=u^3+(3-\lambda_1^{\mathrm{II}})(u^2v+u^2w)+\\
\qquad(2-\lambda_2^{\mathrm{II}})uvw\\
b_{0,3,0}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=v^3+(3-\lambda_1^{\mathrm{II}})(uv^2+v^2w)+\\
\qquad(2-\lambda_2^{\mathrm{II}})uvw\\
b_{0,0,3}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)=w^3+(3-\lambda_1^{\mathrm{II}})(uw^2+vw^2)+\\
\qquad(2-\lambda_2^{\mathrm{II}})uvw
\end{cases}$$

利用 De Casteljau 算法[1]，可以递推得到任意 n 阶 Ⅰ 型和 Ⅱ 型二元 Q-Bernstein 基函数，为

$$b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)=ub_{i-1,j,k}^{t,n-1}(u,v,w)+vb_{i,j-1,k}^{t,n-1}(u,v,w)+wb_{i,j,k-1}^{t,n-1}(u,v,w)\quad(t=\mathrm{I},\mathrm{II})\tag{2}$$

当 $b_{i,j,k}^{t,m}(u,v,w)$ 上、下标中 i,j,k,m 的任意一个为 -1 时，取 $b_{i,j,k}^{t,m}(u,v,w)=0$。

定义 3：设 $\{\boldsymbol{P}_{i,j,k}\}_{i+j+k=n}$ 是空间中 $(n+1)(n+2)/2$ 个点，则 n 阶 Ⅰ 型、Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{t,n}(u,v,w)$ $(t=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 以及 n 阶三角 Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{n}(u,v,w)$ 分别定义为

$$\boldsymbol{S}^{t,n}(u,v,w)=\sum_{i+j+k=n}b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)\boldsymbol{P}_{i,j,k}$$
$$(0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1)$$
$$\boldsymbol{S}^{n}(u,v,w)=\sum_{i+j+k=n}B_{i,j,k}^{n}(u,v,w)\boldsymbol{P}_{i,j,k}$$
$$(0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1)$$

n 阶二元 Bernstein 基函数 $\{B_{i,j,k}^{n}(u,v,w)\}_{i+j+k=n}$ 的定义为

$$B_{i,j,k}^{n}(u,v,w)=\frac{n!}{i!\ j!\ k!}u^iv^jw^k$$
$$(0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1)$$

以往研究中，二元 Q-Bernstein 基函数只带有 1 个形状参数，鉴于本文的基函数都带有 2 个形状参数，因此其中有些是本文的特例(表 1)。

表 1 特例

Tab.1 Special cases

文献	形状参数的取法
[13]	在 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)\}_{i+j+k=2}$ 中取 $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2+2\lambda$，$\lambda_2^{\mathrm{I}}=4+\lambda$
[16]	在 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)\}_{i+j+k=3}$ 中取 $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2+\alpha$，$\lambda_2^{\mathrm{II}}=2$ $(\alpha=\beta=\gamma)$

2　两种二元 Q-Bernstein 基函数和三角 Q-Bézier曲面的性质

二元 Q-Bernstein 基函数有如下性质：

命题 1：当 $t=\mathrm{I}$，II 时，二元 Q-Bernstein 基函数 $\{b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)\}_{i+j+k=n}$ 满足下述性质：

(1) 非负性：$b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)\geqslant 0(i+j+k=n)$。

(2) 归一性：$\sum\limits_{i+j+k=n} b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)=1$。

(3) 对称性：$b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)=b_{i,k,j}^{t,n}(u,w,v)=b_{j,i,k}^{t,n}(v,u,w)=b_{j,k,i}^{t,n}(v,w,u)=b_{k,i,j}^{t,n}(w,u,v)=b_{k,j,i}^{t,n}(w,v,u)$。

(4) 线性无关性：$\sum\limits_{i+j+k=n} a_{i,j,k}b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)=0$ 的充要条件为 $a_{i,j,k}=0(i+j+k=n)$。

(5) 退化性：当形状参数取某些特定值时，$\{b_{i,j,k}^{t,n}(u,v,w)\}_{i+j+k=n}$ 就退化成为 n 阶二元 Bernstein 基函数 $\{B_{i,j,k}^{n}(u,v,w)\}_{i+j+k=n}$：当 $t=\mathrm{I}$ 时，取 $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2$，$\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$；当 $t=\mathrm{II}$ 时，取 $\lambda_1^{\mathrm{II}}=3$，$\lambda_2^{\mathrm{II}}=2$。

命题 1 的证明通过直接计算即可得到。由命题 1 可得出三角 Q-Bézier 曲面的几个重要性质。

命题 2：当 $t=\mathrm{I}$，II 时，n 阶三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{t,n}(u,v,w)$ 满足下述性质：

(1) 几何不变性和仿射不变性。

(2) 凸包性：三角 Q-Bézier 曲面位于控制顶点的凸包内。

(3) 对称性：对称的控制网格可以得到对称的三角 Q-Bézier 曲面。

(4) 表示唯一性：两张相同的三角 Q-Bézier 曲面其控制顶点相同，反之不同的控制顶点得到不同的三角 Q-Bézier 曲面。

(5) 角点插值性：$\boldsymbol{S}^{t,n}(1,0,0)=\boldsymbol{P}_{n,0,0}$，$\boldsymbol{S}^{t,n}(0,1,0)=\boldsymbol{P}_{0,n,0}$，$\boldsymbol{S}^{t,n}(0,0,1)=\boldsymbol{P}_{0,0,n}$。

(6) 角点切平面性：$\boldsymbol{S}^{t,n}(u,v,w)$ 在 $\boldsymbol{P}_{n,0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,n,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,0,n}$ 3 个角点的切平面分别是 $\boldsymbol{P}_{n,0,0}\boldsymbol{P}_{n-1,1,0}\boldsymbol{P}_{n-1,0,1}$，$\boldsymbol{P}_{0,n,0}\boldsymbol{P}_{1,n-1,0}\boldsymbol{P}_{0,n-1,1}$，$\boldsymbol{P}_{0,0,n}\boldsymbol{P}_{1,0,n-1}\boldsymbol{P}_{0,1,n-1}$。

(7) 退化性：当形状参数取命题 1 中性质(5)的特定值时，n 阶三角 Q-Bézier 曲面就退化成为 n 阶三角 Bézier 曲面。

命题 2 的证明通过直接计算即可得到。

3　形状参数的几何意义

为了便于使用者进行曲面调整，分析三角 Q-Bézier 曲面中形状参数的几何意义，指出某一个形状参数改变而另一个形状参数不变时，三角 Q-Bézier 曲面将如何变化，这使得使用者对形状参数进行调整更有针对性和目的性。

首先，给出在三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$、$\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 中，各个形状参数对曲面的影响。

命题 3：在三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 中，当其中一个形状参数增大而另一个形状参数保持不变时，曲面将靠近控制网格；反之，当其中一个形状参数减小而另一个形状参数保持不变时，曲面将远离控制网格。

证明：首先分析 2 阶 I 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 中的形状参数 λ_1^{I} 对曲面的影响。对 2 阶 I 型二元 Q-Bernstein 基函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)\}_{i+j+k=2}$ 关于 λ_1^{I} 求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{0,1,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=v^3w+vw^3+v^2w^2\geqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{1,0,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=u^3w+uw^3+u^2w^2\geqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{1,1,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=u^3v+uv^3+u^2v^2\geqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{2,0,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=-\left(u^3v+u^3w+\frac{u^2v^2+u^2w^2}{2}\right)\leqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{0,2,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=-\left(uv^3+v^3w+\frac{u^2v^2+v^2w^2}{2}\right)\leqslant 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\mathrm{I}}}b_{0,0,2}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=-\left(uw^3+vw^3+\frac{u^2w^2+v^2w^2}{2}\right)\leqslant 0$$

由此，当形状参数 λ_1^{I} 增大，而 λ_2^{I} 不变时，$b_{0,1,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$、$b_{1,0,1}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$、$b_{1,1,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 增大，$b_{2,0,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$、$b_{0,2,0}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$、$b_{0,0,2}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 减小。

结合 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 的表达式为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)=\sum_{i+j+k=2}b_{i,j,k}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)\boldsymbol{P}_{i,j,k}$$
$$(0\leqslant u,v,w\leqslant 1,u+v+w=1)$$

当形状参数 λ_1^{I} 增大，而 λ_2^{I} 保持不变时，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 靠近控制顶点 $\boldsymbol{P}_{0,1,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,0,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,1,0}$，远离控制顶点 $\boldsymbol{P}_{2,0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,2,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,0,2}$。在 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 的 6 个控制顶点中，$\boldsymbol{P}_{2,0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,2,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,0,2}$ 是 3 个角点，$\boldsymbol{P}_{0,1,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,0,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,1,0}$ 剩下的 3 个位于中间位置的控制顶点。由于 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 插值 3 个角点 $\boldsymbol{P}_{2,0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,2,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,0,2}$，所以 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 靠近控制顶点 $\boldsymbol{P}_{0,1,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,0,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,1,0}$ 就表现为 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 靠近控制网格。同理，随着形状参数 λ_1^{I} 减小而 λ_2^{I} 保持不变，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 将远离控制网格。

对于 3 阶 II 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 中的 2 个形状参数也可以作类似的分析，得到相应的结果，由此可以证明命题 3。

根据命题 3，分析当形状参数变化时，三角 Q-Bézier 曲面的变化范围：

推论 1：当形状参数取值不同时，三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 可以出现在同一控制网格对应的三角 Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{2}(u,v,w)$ 的两侧；三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 仅出现在同一控制网格对应的三角 Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{3}(u,v,w)$ 远离控制网格的一侧。

证明：当 $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$ 时，2 阶 Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 就退化成为 2 阶三角 Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{2}(u,v,w)$。由于形状参数 λ_1^{I}、λ_2^{I} 取值范围是 $0<\lambda_1^{\mathrm{I}}\leqslant 4$、$0\leqslant\lambda_2^{\mathrm{I}}\leqslant 5$，那么根据命题 3，当 $0<\lambda_1^{\mathrm{I}}<2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$ 时，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 在 $\boldsymbol{S}^{2}(u,v,w)$ 远离控制网格的一侧；当 $2<\lambda_1^{\mathrm{I}}\leqslant 4,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$ 时，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 在 $\boldsymbol{S}^{2}(u,v,w)$ 靠近控制网格的一侧。对于 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 也可以作类似的分析。由此，推论 1 得证。

虽然命题 3 指出所有形状参数对三角 Q-Bézier 曲面的影响类似，但是下面的命题 4 指出 λ_1^t 和 λ_2^t $(t=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 对三角 Q-Bézier 曲面的影响在直观上还是有所不同。

命题 4：当 $t=\mathrm{I},\mathrm{II}$ 时，在三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{t,n}(u,v,w)$ 中，保持形状参数 λ_1^t 不变而仅改变形状参数 λ_2^t 的值时，曲面的 3 条边界曲线保持不变。

为证明命题 4 成立，先证明下述引理 1。

引理 1：Ⅰ 型二元 Q-Bernstein 基函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},n}(u,v,w)\}_{i+j+k=n}$ 有如下性质：函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},n}(0,v,w)\}_{i+j+k=n}$，$\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},n}(u,0,w)\}_{i+j+k=n}$，$\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},n}(u,v,0)\}_{i+j+k=n}$ 的表达式中不含有形状参数 λ_2^{I}，即它们的值与 λ_2^{I} 无关。

证明：利用数学归纳法来进行证明：

(1) 当 $n=2$ 时，根据公式中 2 阶 Ⅰ 型二元 Q-Bernstein 基函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)\}_{i+j+k=2}$ 的定义，通过直接计算验证，引理 1 成立。

(2) 假设 $n=r$ 时，r 阶 Ⅰ 型二元 Q-Bernstein 基函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},r}(u,v,w)\}_{i+j+k=r}$ 满足引理 1。当 $n=r+1$ 时，根据式(2)可得

$$b_{i,j,k}^{\mathrm{I},r+1}(0,v,w)=vb_{i,j-1,k}^{\mathrm{I},r}(0,v,w)+wb_{i,j,k-1}^{\mathrm{I},r}(0,v,w)$$

根据假设，函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},r+1}(0,v,w)\}_{i+j+k=r+1}$ 的表达式中不含有形状参数 λ_2^{I}，函数的值与 λ_2^{I} 无关。同理可得，函数 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},r+1}(u,0,w)\}_{i+j+k=r+1}$ 和 $\{b_{i,j,k}^{\mathrm{I},r+1}(u,v,0)\}_{i+j+k=r+1}$ 也满足引理 1。

综上所述，引理 1 成立。

由于两种二元 Q-Bernstein 基函数和三角 Q-Bézier 曲面性质相似，所以下面只证明 $t=\mathrm{I}$ 时命题 4 成立，当 $t=\mathrm{II}$ 时证明过程与 $t=\mathrm{I}$ 的类似。

证明：Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,w)$ 的一条边界曲线为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,0)=\sum_{i+j+k=n}b_{i,j,k}^{\mathrm{I},n}(u,v,0)\boldsymbol{P}_{i,j,k}$$

根据引理 1，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,0)$ 与 λ_2^{I} 无关，所以仅改变 λ_2^{I} 而 λ_1^{I} 不变时，曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,w)$ 的边界曲线 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,0)$ 保持不变。同理可得，此时曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,v,w)$ 的另外 2 条边界曲线 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(u,0,w)$、$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},n}(0,v,w)$ 也保持不变。由此命题 4 成立。

根据命题 4，当设计人员对三角 Q-Bézier 曲面的边界曲线满意而仍需要调整三角 Q-Bézier 曲面时，只需调整形状参数 $\lambda_2^t(t=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 即可。

4　数值实例

图 1 和图 2 给出了三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 和 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 在一个形状参数改变而另一个形状参数不变时，三角 Q-Bézier 曲面的变化情况。

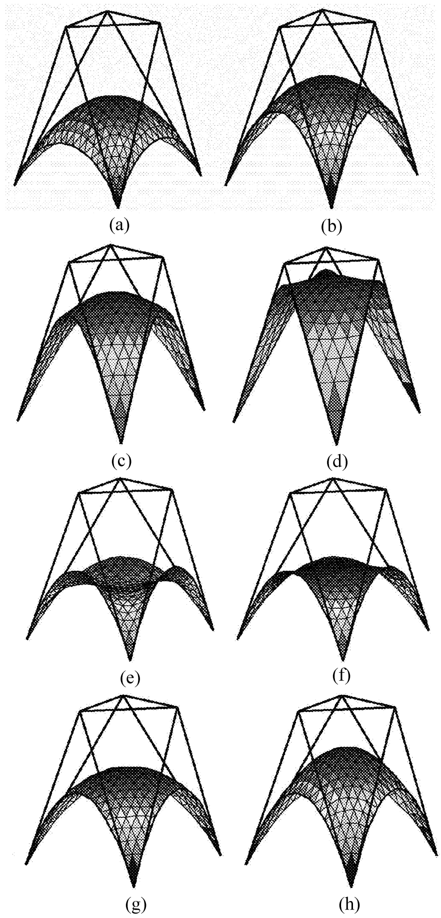

图 1　三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$

Fig. 1　Triangular Q-Bézier surfaces $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$

(a) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=1,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$　(b) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$　(c) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=3,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$　(d) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=4,\lambda_2^{\mathrm{I}}=4$　(e) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=0$　(f) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=5/3$　(g) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=10/3$　(h) $\lambda_1^{\mathrm{I}}=2,\lambda_2^{\mathrm{I}}=5$

由图 1 和图 2 可得：

(1) 图 1 和图 2 验证了命题 3：当任意一个形状参数增大而另一个形状参数保持不变时，三角 Q-Bézier 曲面将靠近控制网格。

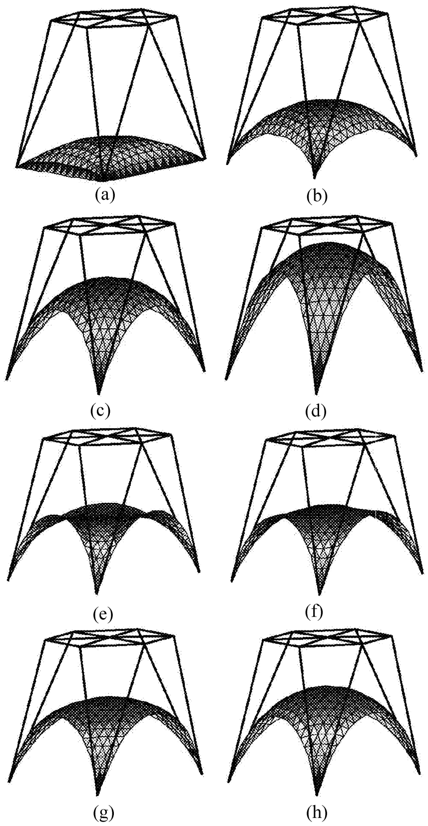

图 2　三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$

Fig. 2　Triangular Q-Bézier surfaces $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$

(a) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=0,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2$　(b) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=1,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2$　(c) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2$

(d) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=3,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2$　(e) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=0$　(f) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2/3$

(g) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=4/3$　(h) $\lambda_1^{\mathrm{II}}=2,\ \lambda_2^{\mathrm{II}}=2$

(2) 图 1a ~ 1d 和图 2a ~ 2d 验证了推论 1。根据命题 2，图 1c 中的曲面即为 2 阶三角 Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^2(u,v,w)$，显然有图 1a 和图 1b 中的三角 Q-Bézier 曲面在 $\boldsymbol{S}^2(u,v,w)$ 远离控制网格的一侧，图 1d 中的三角 Q-Bézier 曲面在 $\boldsymbol{S}^2(u,v,w)$ 靠近控制网格的一侧，对图 2a ~ 2d 进行观察后也可验证推论 1 的结论。

(3) 图 1e ~ 1h 和图 2e ~ 2h 验证了命题 4：保持形状参数 λ_1^t ($t=\mathrm{I},\mathrm{II}$) 不变而改变形状参数 λ_2^t ($t=\mathrm{I},\mathrm{II}$) 的值时，三角 Q-Bézier 曲面的 3 条边界曲线保持不变。图 1 和图 2 得到了一些与众不同的曲面（图 1e 和图 2e），使所得曲面的种类更加丰富。在曲面边界曲线固定后，利用 λ_2^t ($t=\mathrm{I},\mathrm{II}$) 仍然能够对曲面进行微调，这是以往的结果中不曾出现的。

5　三角 Q-Bézier 曲面间的 C^0 连续光滑拼接

尽管多张曲面片的光滑拼接是几何外形设计的核心内容之一，但在已有的相关工作中，仅文献[16]对此进行了相应的讨论。这里，借助命题 4，给出两张同类型的三角 Q-Bézier 曲面在进行形状调整时仍能够保持 C^0 连续拼接的充分条件：

命题 5：当 $t=\mathrm{I},\mathrm{II}$ 时，设两张三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}_1^{t,n}(u,v,w)$ 和 $\boldsymbol{S}_2^{t,n}(u,v,w)$ 的形状参数分别为 λ_1^t、λ_2^t 和 μ_1^t、μ_2^t，则当两张曲面的边界有公共的控制顶点时，仅改变 λ_2^t 和 μ_2^t 将使两张曲面在行形状调整时仍能够保持 C^0 连续拼接。

命题 5 的结论可由命题 4 直接得到，限于篇幅，此处不再赘述。

6　两种三角 Q-Bézier 曲面的比较

从两个角度对本文提出的两种三角 Q-Bézier 曲面进行比较：

(1) 计算量：n 阶 Ⅰ 型和 Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面都对应着 $(n+1)(n+2)/2$ 个控制顶点，但是两种曲面所对应的二元 Q-Bernstein 基函数其次数是不同的——n 阶 Ⅰ 型和 Ⅱ 型二元 Q-Bernstein 基函数的次数分别是是 $n+2$ 次和 n 次。因此，如果给定数目相同的控制顶点，Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面的计算量大于 Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面。

(2) 三角 Q-Bézier 曲面的变化范围：根据推论 1，当形状参数发生变化时，3 阶 Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{II},3}(u,v,w)$ 只能出现在 $\boldsymbol{S}^3(u,v,w)$ 远离控制网格的一侧，2 阶 Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I},2}(u,v,w)$ 则可以出现在 $\boldsymbol{S}^2(u,v,w)$ 的两侧。因此，Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面的变化范围大于 Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面。

综上所述，Ⅰ 型三角 Q-Bézier 曲面的计算量大，变化范围也大；而 Ⅱ 型三角 Q-Bézier 曲面的计算量小，变化范围也小。那么在进行曲面设计时，可以结合计算量和曲面变化范围来进行选择。

7　结束语

构造了两种三角域上带两个形状参数的二元 Q-Bernstein 基函数，并在此基础上构造了两种带两个形状参数的三角 Q-Bézier 曲面。这两种三角 Q-Bézier 曲面不仅具有与三角 Bézier 曲面相似的性质——几何不变性、仿射不变性、凸包性、对称性、表示唯一性、角点插值性和角点切平面性；而且在控制顶点固定的前提下，三角 Q-Bézier 曲面的外形可以通过改变形状参数的值来进行调整。以往研究只带有一个形状参数的 Q-Bernstein 基函数都是它的特例（表 1）。这些形状参数几何意义明显，还能使曲面在 3 条边界曲线固定后仍能够调整外形。最后，从计算量和曲面变化范围两方面对这两种三角 Bézier 曲面进行比较，讨论了该如何选取合适的三角 Q-Bézier 曲面进行曲面设计。

参 考 文 献

1 Farin G. Triangular Bernstein-Bézier patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(2): 83 ~ 127.

2 Farin G, Piper B, Worsey A. The octant of a sphere as a non-degenerate triangular Bézier patch [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 329 ~ 332.

3 孙殿柱, 田中朝, 李延瑞, 等. 三角网格模型变形设计[J]. 农业机械学报, 2010, 41(3): 223 ~ 226.
Sun Dianzhu, Tian Zhongchao, Li Yanrui, et al. Innovative deformation design of triangular mesh model [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(3): 223 ~ 226. (in Chinese)

4 孙殿柱,李心成,李延瑞, 等. 三角网格曲面高精度刀轨快速生成算法[J]. 农业机械学报, 2010, 41(7): 223 ~ 226.
Sun Dianzhu, Li Xincheng, Li Yanrui, et al. Research on high precision and fast generation algorithm of NC tool path for triangular mesh surface [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(7): 223 ~ 226. (in Chinese)

5 Pan Yongjuan, Wang Guojin. A new method for automatically constructing convexity-preserving interpolatory splines [J]. Progress in Natural Science, 2004, 14(6): 524 ~ 535.

6 陈军, 王国瑾. 利用形状参数构造保凸插值的双曲多项式 B 样条曲线[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(7): 1 216 ~ 1 224.
Chen Jun, Wang Guojin. Constructing convexity-preserving interpolation curves of hyperbolic polynomial B-splines using a shape parameter [J]. Journal of Computer Research and Development, 2006, 43(7): 1 216 ~ 1 224. (in Chinese)

7 Han Xuli. Piecewise quartic polynomial curves with a local shape parameter [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 195(1 ~ 2): 34 ~ 45.

8 徐岗, 汪国昭. 带局部形状参数的三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 计算机研究与发展, 2007, 44(6): 1 032 ~ 1 037.
Xu Gang, Wang Guozhao. Extensions of uniform cubic B-spline curve with local shape parameters [J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 44(6): 1 032 ~ 1 037. (in Chinese)

9 Han Xi'an, Ma Yichen, Huang Xili. A novel generalization of Bézier curve and surface [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 217(1): 180 ~ 193.

10 Xiang Taining, Liu Zhi, Wang Weifeng, et al. A novel extension of Bézier curves and surfaces of the same degree [J]. Journal of Information & Computational Science, 2010, 7(10): 2 080 ~ 2 089.

11 Han Xuli. A class of general quartic spline curves with shape parameters [J]. Computer Aided Geometric Design, 2011, 28(3): 151 ~ 163.

12 夏成林, 邬弘毅, 郑兴国, 等. 带多个形状参数的三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 工程图学学报, 2011, 32(2): 73 ~ 79.
Xia Chenglin, Wu Hongyi, Zheng Xingguo, et al. Extension of uniform cubic B-spline curves with multiple shape parameters [J]. Journal of Engineering Graphics, 2011, 32(2): 73 ~ 79. (in Chinese)

13 Yan Lanlan, Liang Jiongfeng. An extension of the Bézier model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(6): 2 863 ~ 2 879.

14 曹娟, 汪国昭. 三角域上三次 Bernstein-Bézier 参数曲面的扩展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(9): 1 403 ~ 1 407.
Cao Juan, Wang Guozhao. Extension of the cubic Bernstein-Bézier surfaces over the triangular domain [J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(9): 1 403 ~ 1 407. (in Chinese)

15 吴晓勤, 韩旭里. 带有形状参数的 Bézier 三角曲面片[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(11): 1 735 ~ 1 740.
Wu Xiaoqin, Han Xuli. Bézier triangular patch with a shape parameter[J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(11): 1 735 ~ 1 740. (in Chinese)

16 刘植, 檀结庆, 陈晓彦. 三角域上带形状参数的三次 Bézier 曲面[J]. 计算机研究与发展, 2012, 49(1): 152 ~ 157.
Liu Zhi, Tan Jieqing, Chen Xiaoyan. Cubic Bézier triangular patch with shape parameters[J]. Journal of Computer Research and Development, 2012, 49(1): 152 ~ 157. (in Chinese)