doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.05.049

# 非圆斜齿轮滚切策略与实用模型性能分析\*

刘有余1.2 韩 江1 夏 链1 张国政1

(1. 合肥工业大学 CIMS 研究所, 合肥 230009; 2. 安徽工程大学机械与汽车工程学院, 芜湖 241000)

摘要:为实现非圆斜齿轮滚切加工,基于5轴联动滚切策略,应用运动学原理推导齿坯附加转动和滚刀附加转动 2种方案的基本数学模型;采用工件等弧长、工件等转角和工件等极角3种方法简化该模型,构成6种滚切实现方 案及实用模型;采用 Matlab软件对6种模型进行五联动轴的(角)速度、(角)加速度动态性能分析,得出加工精度 及效率高、动态品质综合性能较好的等弧长齿坯附加转动和等弧长滚刀附加转动2种最佳模型。经滚切试验验证 了模型的正确性,齿面测试分析与仿真结论一致。

关键词:非圆斜齿轮 滚切加工 实用模型 联动控制 性能分析

中图分类号: TH132.424; TG61<sup>+</sup>2 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2013)05-0281-07

# Hobbing Process Strategy for Non-circular Helical Gears and Performance Analyses for Functional Models

Liu Youyu<sup>1,2</sup> Han Jiang<sup>1</sup> Xia Lian<sup>1</sup> Zhang Guozheng<sup>1</sup>

(1. CIMS Institute, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China

2. School of Mechanical and Automotive Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China)

Abstract: The application of non-circular helical gears has been restricted to its manufacturing techniques. To realize their hobbing process, based on the strategy of a five-axle linkage, two basic mathematical models of the schemes of work piece extra rotation or hob extra rotation were deduced according to the kinematic principle. The models were simplified based on the algorithms of the equal arc length or equal rotate angle or equal polar angle, which composed the six implementing schemes and functional models. The models obtained were analyzed about the dynamic property of the five synchronal axes, including both their velocities or angular velocities and their accelerations or angular accelerations, by using Matlab. Finally, the two optimization models that equal arc length & work piece extra rotation and equal arc length & hob extra rotation with high accuracy and efficiency were obtained, which have highly dynamic comprehensive performance. The models were demonstrated to be valid by hobbing testing, and the results between the testing of tooth flanks and computer simulations were in good agreement.

Key words: Non-circular helical gears Hobbing process Functional models Linkage control Performance analyses

**引言** 非圆齿轮是插秧机<sup>[1]</sup>、施肥机等农业机械的重 要零件,在仪器仪表、航空航天等无级变速机构中也 应用广泛。非圆斜齿轮因传动平稳、承载能力高、机 构紧凑等优点,可应用于高速、重载领域。因种类繁

收稿日期: 2012-03-14 修回日期: 2012-04-17

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目(51275147)和安徽省高等学校省级自然科学研究重点资助项目(KJ2013A039)

作者简介:刘有余,博士生,安徽工程大学副教授,主要从事现代集成制造系统和齿轮机床数控系统研究,E-mail: liuyyu@ahpu.edu.cn 通讯作者:韩江,教授,博士生导师,主要从事现代集成制造系统和齿轮机床数控系统研究,E-mail: hanjiang626@126.com

多、形状复杂,设计计算和加工制造困难,非圆斜齿 轮研究进展缓慢。国外对非圆齿轮的研究较多注重 设计及机构应用<sup>[2~3]</sup>,尚未见对非圆斜齿轮滚切技 术的报道;国内学者有过积极探索,建立了几种非圆 (斜)齿轮加工数学模型<sup>[4~6]</sup>,但均未深入研究滚切 策略及分析比较模型的联动方案,未能提供性能良 好的实用模型。目前,非圆斜齿轮仍未实现工业生 产与应用。本文基于运动学原理,研究 5 轴联动滚 切策略,建立非圆斜齿轮滚切实用数学模型,通过性 能分析进行最佳模型遴选。

### 1 非圆斜齿轮滚切策略

如图 1,滚切非圆斜齿轮需两个运动:产生渐开 线的展成运动和产生螺旋线的进给运动。展成运动 是滚刀与齿坯间的啮合运动,可分解为滚刀和齿坯 的回转运动 $\omega_b$ 和 $\omega_e$ ,需保持严格传动比;进给运动 可分解为滚刀沿z轴竖直运动 $v_z$ 和齿坯附加回转运 动 $\Delta\omega_e$ ,或分解为 $v_z$ 和滚刀附加回转运动 $\Delta\omega_b$ ,需保 持严格传动比。



Fig. 1 Schematic diagram of hobbing process

根据工具斜齿条法加工非圆斜齿轮的啮合理 论<sup>[6]</sup>,工具斜齿条节平面与非圆斜齿轮节曲柱面作 无相对滑动的纯滚动,两者相切于瞬时轴(平行于 齿坯轴线),滚刀及附加运动( $\Delta \omega_e$ 或  $\Delta \omega_b$ )可实现 工具斜齿条功能。如图 2 所示,滚刀在齿坯端面内 投影即为齿条,其节线与非圆斜齿轮端面之节曲线



图 2 齿坯端面截面图 Fig. 2 Section of workpiece on end-face

相切于 P点(瞬心)。纯滚动要求随着齿坯转动,滚 刀节线既作平移,又有转动。受机构限制可让滚刀 不作斜向运动,按相对运动原理,齿坯除转动外,还 需作平动  $v_x$ 和  $v_y$ ,啮合点位于空间固定点 P。得到 5 轴联动加工策略:滚刀转动  $\omega_b$ 、齿坯转动  $\omega_c$ 、竖直 运动  $v_z$ 、平动  $v_x$ 、平动  $v_y$ 、齿坯附加转动  $\Delta\omega_c$ (方案 1)或滚刀附加转动  $\Delta\omega_b$ (方案 2)。

#### 2 数学建模

#### 2.1 基本数学模型

如图 2 所示,在 P 点建立机床坐标系 S(Oxyz), 其 x 轴和 z 轴分别与滚刀节线和齿坯轴线平行;建 立与工具斜齿条固联的刀具坐标系  $S_b(O_b x_b y_b z_b)$ , 起始时与 S(Oxyz) 重合;与齿坯固联的工件坐标系  $S_c(O_c x_c y_c z_c)$ ,原点位于齿坯回转中心,起始时与 S(Oxyz)各轴平行,齿坯转角  $\varphi_c = 0$ 。极角为 $\theta$ ,齿轮 节曲线极坐标方程为  $r = r(\theta)$ ,起始时极轴与  $y_c$  轴 重合。 $\theta, \varphi_c$  及齿坯角速度  $\omega_c$  的正方向如图 2 所 示。图中  $\mu$  为极径与齿坯节曲线切线正方向的夹 角,由微积分理论<sup>[7]</sup>可知

$$\tan \mu = r/(dr/d\theta) \quad (0 \le \mu < \pi)$$
  

$$\sin \mu = r/\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} \quad (1)$$
  

$$\cos \mu = (dr/d\theta)/\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}$$

如图 2 所示,因齿坯节曲线与投影齿条节线在 P 点作纯滚动,故投影齿条平移的距离 *l* 应等于齿 坯节曲线转过的弧长 *s*,即<sup>[7]</sup>

$$l = s = \int_{0}^{\theta} \sqrt{r^{2} + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^{2}} \mathrm{d}\theta \qquad (2)$$

故投影齿条平移速度 v<sub>b</sub> 的大小为

$$v_{b} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{r^{2} + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad (3)$$

由图2及式(1)得

$$\begin{cases} \theta = \varphi_c - \mu + \pi/2 \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2)}{r^2 + (dr/d\theta)^2} \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$
(4)

从而极角速度为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2 + (\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}{r^2 + 2\,(\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2 - r(\,\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}\theta^2)}\omega_c \quad (5)$$

将式(5)代入式(3),得

$$v_b = \frac{\left\lfloor r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 \right\rfloor^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 - r\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2}\right)}\omega_c \qquad (6)$$

纯滚动要求齿坯在P点速度 $v_p$ 与投影齿条(节线)的移动速度 $v_b$ 相等,故 $O_c$ 点平动速度为

$$\mathbf{v}_{oc} = \mathbf{v}_{p} + \mathbf{v}_{ocp}$$
  
其中  $\mathbf{v}_{ocp} = r\omega_{c}$   
式中  $\mathbf{v}_{ocp}$ ——点  $O_{c}$  相对于点  $P$  的线速度

工作台半动速度分量为  

$$\begin{cases}
v_x = v_b - v'_x = v_b - r\omega_e \sin\mu \\
v_y = v'_y = r\omega_e \cos\mu
\end{cases}$$
(7)  
式中  $v'_x \longrightarrow v_{oep} \alpha x$  轴上分速度  
 $v'_y \longrightarrow v_{oep} \alpha y$  轴上分速度  
将式(1)、(6)代入式(7),得  

$$\begin{cases}
v_x = \frac{r^3(d^2r/d\theta^2) + (dr/d\theta)^4}{\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}[r^2 + 2(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2)]}\omega_e \\
v_y = \frac{r(dr/d\theta)}{\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}}\omega_e
\end{cases}$$
(8)

如图 3 所示,t-t 为齿向公切线,n-n 为齿向 公法线,瞬时啮合点为 P,非圆斜齿轮螺旋角为  $\beta_c$ , 滚刀螺旋升角为  $\lambda_b$ 。滚刀节圆柱在 P点的线速度  $v_i$ 的大小为

$$v_{t} = Km_{t}\omega_{b}/2 = Km_{n}\omega_{b}/(2\sin\lambda_{b})$$
(9)

式中 m1----端面模数

*m*<sub>n</sub>-----法面模数

K——滚刀头数

滚刀和齿坯在啮合点 P 处的法向速度应相 等<sup>[6]</sup>,即

$$v_{t}^{(n)} = v_{t} \sin \lambda_{b} = v_{p}^{(n)} = v_{p} \cos \beta_{c} \qquad (10)$$

如前所述, $\mathbf{v}_{P} = \mathbf{v}_{b}$ ,将式(9)代入式(10)得

$$v_b = Km_{\rm n}\omega_b/(2\cos\beta_c) \tag{11}$$

将式(11)代入式(7)得

$$v_{x} = \frac{Km_{n}\omega_{b}}{2\cos\beta_{c}} - \frac{r^{2}\omega_{c}}{\sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}}}$$
(12)

将式(12)代入式(8)得

$$\boldsymbol{\omega}_{c} = \frac{r^{2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^{2} - r\left(\frac{\mathrm{d}^{2}r}{\mathrm{d}\theta^{2}}\right)}{2\left[r^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^{2}\right]^{3/2} \cos\beta_{c}} K m_{\mathrm{n}} \boldsymbol{\omega}_{b} \quad (13)$$

为形成工具斜齿条切出齿宽,滚刀需作竖直运动 ν<sub>z</sub>,且沿齿坯轴向移动一个导程,齿坯附加转动一 周。方案1因螺旋角 β<sub>c</sub> 恒定,得



$$\int_{0}^{t} r\Delta\omega_{c} dt = \tan\beta_{c} \int_{0}^{t} v_{z} dt$$

两边求导并化简为

$$\Delta \omega_c = v_z \tan \beta_c / r \tag{14}$$

故齿坯合成后转速 $\omega_c^*$ 为

$$\omega_c^* = \omega_c \pm \Delta \omega_c \tag{15}$$

滚刀与齿轮螺旋线旋向一致则取"+",反之取 "-"。

对于方案 2, 如图 3 所示, 滚刀作竖直运动  $v_z$ , 其在公法线上分量为  $v_z^{(n)}$ ;滚刀附加  $\Delta \omega_b$ ,则在 P 点 附加线速度为  $v_{\Delta}$ ,其在公法线上分量为  $v_{\Delta}^{(n)}$ 。各关 系为

$$\begin{cases} v_{z}^{(n)} = v_{z} \sin\beta_{c} \\ v_{\Delta} = Km_{t} \Delta\omega_{b}/2 = Km_{n} \Delta\omega_{b}/(2\sin\lambda_{b}) \\ v_{\Delta}^{(n)} = v_{\Delta} \sin\lambda_{b} \\ v_{z}^{(n)} = v_{\Delta}^{(n)} \\ \overrightarrow{r}^{*}(16) \overrightarrow{n} \overrightarrow{\ell}^{\underline{n}} \end{cases}$$
(16)

据式(16)可得

$$\Delta \omega_b = 2v_z \sin \beta_c / (Km_n) \tag{17}$$

故滚刀合成后转速 $\omega_h^*$ 为

$$\boldsymbol{\omega}_{b}^{*} = \boldsymbol{\omega}_{b} \mp \Delta \boldsymbol{\omega}_{b} \tag{18}$$

滚刀与齿轮螺旋线旋向一致则取"-",反之取 "+"。

由式(8)、(13)、(15)联立或式(8)、(13)、(18) 联立可分别实现方案1或方案2的滚切加工。

# 2.2 实用数学模型

非圆齿轮的滚切有工件等弧长、工件等转角和 工件等极角3种方法。等弧长指工件相对滚刀作等 弧长运动,滚刀转速恒定;等转角指工件相对机床作 等转角运动,工件转速恒定;等极角指工件相对机床 作等转角运动。本文对非圆斜齿轮的前述2种方案 分别采用上述3种方法,形成6种滚切实现方案: (Ⅰ)等弧长齿坯附加转动,(Ⅱ)等弧长滚刀附加转 动,(Ⅲ)等转角齿坯附加转动,(Ⅳ)等转角滚刀附



图 3 滚切公切面示意图
 Fig. 3 Common tangent plane of hobbing
 (a) 滚刀与齿轮螺旋线旋向一致 (b) 滚刀与齿轮螺旋线旋向相反

加转动,(V)等极角齿坯附加转动,(VI)等极角滚 刀附加转动。

基于工件等弧长,对式(8)、(13)、(15)和 式(8)、(13)、(18)联立模型分别化简并适当变形, 可构成方案(I)、(II)的实用数学模型

$$\begin{cases} v_{x} = \frac{\left[r^{3}\left(d^{2}r/d\theta^{2}\right) + \left(dr/d\theta\right)^{4}\right]Km_{n}}{2\left[r^{4} + 2r^{2}\left(dr/d\theta\right)^{2} + \left(dr/d\theta\right)^{4}\right]\cos\beta_{c}}\omega_{b} \\ v_{y} = \frac{\left[r^{2} + 2\left(dr/d\theta\right)^{2} - r\left(d^{2}r/d\theta^{2}\right)\right]\left(dr/d\theta\right)rKm_{n}}{2\left[r^{4} + 2r^{2}\left(dr/d\theta\right)^{2} + \left(dr/d\theta\right)^{4}\right]\cos\beta_{c}}\omega_{b} \\ \omega_{c}^{*} = \frac{r^{2} + 2\left(dr/d\theta\right)^{2} - r\left(d^{2}r/d\theta^{2}\right)}{2\left[r^{2} + \left(dr/d\theta\right)^{2}\right]^{3/2}\cos\beta_{c}}Km_{n}\omega_{b} \pm \frac{\tan\beta_{c}}{r}v_{z} \end{cases}$$
(19)

$$\begin{cases} v_x = \frac{\left[r^3 \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^4\right] Km_n}{2\left[r^4 + 2r^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^4\right] \cos\beta_c} \omega_b \\ v_y = \frac{\left[r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right)\right] \left(\frac{dr}{d\theta}\right) rKm_n}{2\left[r^4 + 2r^2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^4\right] \cos\beta_c} \omega_b \\ \omega_c = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right)}{2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2} \cos\beta_c} Km_n \omega_b \\ \omega_b^* = \omega_b \mp \frac{2\sin\beta_c}{Km_n} v_z \end{cases}$$

$$(20)$$

基于工件等转角,对式(8)、(13)、(15)和 式(8)、(13)、(18)联立模型分别化简并适当变形, 可构成方案(Ⅲ)、(Ⅳ)的实用数学模型

$$\begin{cases} v_x = \frac{r^3 (d^2 r/d\theta^2) + (dr/d\theta)^4}{\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} [r^2 + 2 (dr/d\theta)^2 - r(d^2 r/d\theta^2)]} \omega_c \\ v_y = \frac{r(dr/d\theta)}{\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}} \omega_c \\ \omega_b = \frac{2[r^2 + (dr/d\theta)^2]^{3/2} \cos\beta_c}{[r^2 + 2 (dr/d\theta)^2 - r(d^2 r/d\theta^2)] Km_n} \omega_c \\ \omega_c^* = \omega_c \pm \frac{\tan\beta_c}{r} v_z \end{cases}$$

$$(21)$$

$$\begin{cases} v_{x} = \frac{r^{3} (d^{2}r/d\theta^{2}) + (dr/d\theta)^{4}}{\sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}} [r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})]} \omega_{c} \\ v_{y} = \frac{r(dr/d\theta)}{\sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}}} \omega_{c} \\ \omega_{b}^{*} = \frac{2\cos\beta_{c} [r^{2} + (dr/d\theta)^{2}]^{3/2} \omega_{c}}{[r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})] Km_{n}} \mp \frac{2\sin\beta_{c}}{Km_{n}} v_{z} \end{cases}$$

$$(22)$$

基于工件等极角,对式(8)、(13)、(15)和 式(8)、(13)、(18)联立模型,引入式(5)分别化简 并适当变形,可构成方案(V)、(VI)的实用数学模 型

$$\begin{cases} v_{x} = \frac{r^{3} (d^{2}r/d\theta^{2}) + (dr/d\theta)^{4}}{[r^{2} + (dr/d\theta)^{2}]^{3/2}} \omega \\ v_{y} = \frac{r(dr/d\theta) [r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})]}{[r^{2} + (dr/d\theta)^{2}]^{3/2}} \omega \\ \omega_{b} = \frac{2\cos\beta_{c} \sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}}}{Km_{n}} \omega \\ \omega_{c}^{*} = \frac{r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})}{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}} \omega \pm \frac{v_{z}\tan\beta_{c}}{r} \end{cases}$$
(23)  
$$\begin{cases} v_{x} = \frac{r^{3} (d^{2}r/d\theta^{2}) + (dr/d\theta)^{4}}{[r^{2} + (dr/d\theta)^{2}]^{3/2}} \omega \\ v_{y} = \frac{r(dr/d\theta) [r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})]}{[r^{2} + (dr/d\theta)^{2}]^{3/2}} \omega \\ \omega_{c} = \frac{r^{2} + 2 (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})}{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}} \omega \\ \omega_{b}^{*} = \frac{2 \sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2} - r(d^{2}r/d\theta^{2})}}{Km_{n}} \omega \mp \frac{2v_{z}\sin\beta_{c}}{Km_{n}} \end{cases}$$

(24)

为利于控制,减少联动轴数,6种方案的 $v_z$ 与 $\omega_b, \omega_c, \omega$ 均不相关,可分别以 $v_z$ 与 $\omega_b, \omega_c, \omega$ 或 $\omega$ 驱动脉冲作双基频,其余轴相对 $\omega_b, \omega_c, \omega$ 。公分频。

# 3 实用模型性能分析及方案遴选

优秀数学模型应具备以下滚切性能:被切工件 节曲线上各齿廓切痕均匀,则相同精度要求下加工 效率最高;各联动轴(角)速度、(角)加速度变化范 围最小,则滚切动态品质最佳,利于控制。

一阶椭圆斜齿轮是典型的非圆斜齿轮,本文以此为例分析上述6种实用模型性能,其结论可推广至任意节曲线非圆斜齿轮。基本参数为:半长轴 $a = 150 \text{ mm};偏心率 e = 0.6;滚刀头数 K = 1;法向模数 m<sub>n</sub> = 8 mm;螺旋角 <math>\beta_e = 12.899^\circ$ ;齿数 Z = 33。分析工具采用 Matlab,可方便查询计算变量。

#### 3.1 速度、角速度性能分析

图 2 所示的一阶椭圆齿轮节曲线方程<sup>[8]</sup>为  

$$r = a(1 - e^{2})/(1 - e\cos\theta) \quad (25)$$
则
$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{ae(1 - e^{2})\sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^{2}} \\ \tan\mu = \frac{e\cos\theta - 1}{e\sin\theta} \\ \frac{d^{2}r}{d\theta^{2}} = \frac{ae(e^{2} - 1)(\cos\theta - e\cos^{2}\theta - 2e\sin^{2}\theta)}{(1 - e\cos\theta)^{3}} \end{cases}$$

以沿节曲线滚切一周用时 1.5 s 确定各方案基 频控制轴角速度;将式(25)、(26)分别代入式(19) ~ (24),利用 Matlab 软件仿真出 6 种模型沿椭圆节曲 线极角 θ 的各轴(角)速度曲线,部分如图 4 所示。 200

150

100

50

0

-50

-100

200

150

100

50

-50

-100

ō

极角 $\theta$ /rad

(c)

前速度 / rad •s<sup>−1</sup>

角速度 / rad • s<sup>−1</sup>



图4 (角)速度-极角曲线

Fig. 4 Graphs of  $v(\omega) - \theta$ 

(a)等弧长齿坯附加转动 (b)等弧长滚刀附加转动 (c)等转角齿坯附加转动 (d)等极角齿坯附加转动

对同一种滚切方法,如图 4a 和 4b 所示的等弧 长法,齿坯附加转动和滚刀附加转动2种方案的 5 轴运动(角)速度( $\omega_b$ (或 $\omega_b^*$ )、 $\omega_c^*$ (或 $\omega_c$ )、 $v_x$ 、 $v_y$ 、 v.)差值很小,对加工质量和效率影响很小。等弧 长、等转角和等极角 3 种方法的  $\omega_e^*$  或  $\omega_e$  波动均较 小,但 $\omega_h$ 或 $\omega_h^*$ 波动情况不一,如图 4a、4c、4d,  $\Delta\omega_h$ 分别为 0、93.4 rad/s、187.4 rad/s, Δω<sub>b</sub>/ω<sub>bmin</sub>分别为 0、0.95、3.06。据式(11)可知,在节曲线上工具斜 齿条的  $\Delta v_b / v_{bmin}$  分别为 0、0.95、3.06,因而等弧长法 切痕均匀;等转角法切痕最疏处(0.3π、1.7π)是最 密处(0、π)的 51.28%;等极角法切痕最疏处 (0.1π、1.9π)是最密处(π)的24.63%。故等弧长 法可获得最佳精度与效率,等转角法次之,等极角法 最差。图 4a、4c、4d 的  $\Delta v_x$  和  $\Delta v_x$  分别为 1 111.8、 931.8、1798.7 mm/s和821.3、889.8、1474.0 mm/s, 等弧长和等转角的 x 和  $\gamma$  轴速变范围相当,而等极 角法显著大于前两者,不利于调速控制。

3.2 加速度、角加速度性能分析

将图4所示的 $v(\omega) - \theta$ 图转化为 $v(\omega) - t$ 图,即 将极角 $\theta$ 转化为线性递增的时间 $t_o$ 对等极角法,由  $t = \theta/\omega$ 线性求出t;对等弧长法,由式(2)、(10)得

 $\int_{0}^{b} \sqrt{r^{2} + (dr/d\theta)^{2}} d\theta = Km_{n}\omega_{b}t/(2\cos\beta_{c})$  (27) 经积分解出 *t*; 对等转角法, 因  $\theta = \varphi_{c} - \mu + \pi/2$ , 结合 式(26)得出求解公式为

$$\theta = \omega_e t - \arctan((e\cos\theta - 1)/(e\sin\theta)) + \pi/2$$

利用 Matlab 的 polyder()函数<sup>[9]</sup>对  $v(\omega) - t$  曲 线进行一阶求导,得出图 5 所示的  $a(\alpha) - t$  曲线。

极角θ/rad

(d)

对同一种滚切方法,如图 5a 和 5b 所示的等弧 长法,齿坯附加转动和滚刀附加转动 2 种方案的 5 轴运动(角)加速度( $\alpha_b$ (或 $\alpha_b^*$ )、 $\alpha_c^*$ (或 $\alpha_c$ )、 $a_x$ 、  $a_y$ 、 $a_z$ )差值很小,对动态控制要求差别很小。等弧 长、等转角和等极角 3 种方法的 $\alpha_c^*$ 或 $\alpha_c$ 变化较小, 图 5a、5c、5d 的  $\Delta \alpha_c$  分别为 70.0 rad/s<sup>2</sup>、0.99.7 rad/s<sup>2</sup>; 但  $\alpha_b$ 或 $\alpha_b^*$ 变化差异较大,各方案  $\Delta \alpha_b^*$ 分别为 0、 2 085.2 rad/s<sup>2</sup>、814.5 rad/s<sup>2</sup>。鉴于一般滚刀转动惯 量远小于工作台,需结合机床实情评价,但大多情况 等弧长法较佳。图 5a、5c、5d 的  $\Delta a_x$ 、 $\Delta a_y$  分别为 14.1 mm/s<sup>2</sup>、10.3 mm/s<sup>2</sup>、29.2 mm/s<sup>2</sup>和 2.3 mm/s<sup>2</sup>、 3.5 mm/s<sup>2</sup>、1.3 mm/s<sup>2</sup>,等极角法  $\Delta a_x$  是另两种方法 的 2 倍多,控制性能差,等弧长和等转角法控制性能 相似;3 种方法  $\Delta a_a$  均很小,控制性能好。

#### 4 滚切试验与齿面测试分析

据仿真结果,基于 ARM + DSP + FPGA 滚齿数 控平台按方案(I)、(II)和(V)进行加工<sup>[10]</sup>,如 图 6 所示,3 方案均可正确滚切。用 SEM(扫描电 镜,5.0 kV 8.0 mm × 4.00 k)分别对各方案滚切工件 的第 17 齿( $\theta$  = 187°)和第 1 齿( $\theta$  = 1.3°)进行齿面 成像。方案(I)的 $\theta$  = 187°和 1.3°的齿面形貌如 图 7a 和 7b 所示,切痕平均间距均为 2.5 μm,各齿 精度一致;方案(I)形貌与之相似。方案(V)的



**Fig.5** Graphs of  $a(\alpha) - t$ (a) 等弧长齿坯附加转动 (b) 等弧长滚刀附加转动 (c) 等转角齿坯附加转动 (d) 等极角齿坯附加转动

 $\theta$  = 187°齿面形貌与图 7a 相似,  $\theta$  = 1.3°齿面形貌如 图 7c 所示, 切痕平均间距为 4.8  $\mu$ m, 精度较低, 该 方案各齿精度不一致。测试结果与仿真分析结论一 致。



图 6 椭圆斜齿轮加工过程与结果 Fig. 6 Process and outcome of elliptic helical gear

# 5 结论

(1)基于非圆斜齿轮5轴联动滚切策略,应用运动学原理推导出齿坯附加转动和滚刀附加转动2种方案的基本数学模型,实现了滚切加工。

(2) 采用工件等弧长、等转角和等极角 3 种方 法简化基本数学模型,得到实用模型,构成 6 种滚切 实现方案。



图 7 SEM(5.0 kV 8.0 mm × 4.00 k)齿面成像 Fig. 7 SEM image of tooth flanks

(a) 方案(I), $\theta$ =187°(b) 方案(I), $\theta$ =1.3°(c) 方案(V), $\theta$ =1.3°

(3)对6种模型进行(角)速度、(角)加速度性 能分析:齿坯附加转动和滚刀附加转动对精度、效率 和控制性能影响很小,均可采用;等弧长法在精度、 效率及滚切动态品质等方面性能较佳;等转角法对 工作台转动惯量较大的机床有优势;等极角法众多 特性较差。建议采用方案(I)或(II),其实用模型 为式(19)或式(20)。

(4) 滚切试验验证优选模型正确可行;齿面测 试分析结果与仿真分析结论一致。

#### 参考文献

- 1 李革,李辉,方明辉,等. 旋转式分插机构非圆齿轮参数反求法求解[J]. 农业机械学报, 2011,42(8):46~49.
- Li Ge, Li Hui, Fang Minghui, et al. Non-circular gear parameters of rotary transplanting mechanism calculated by reverse method [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(8):46~49. (in Chinese)
- 2 Erika Ottaviano, Domenico Mundo, Danieli G A, et al. Numerical and experimental analysis of non-circular gears and cam-follower systems as function generators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(8): 996 ~1 008.
- 3 Mundo D, Gatti G, Dooner D B. Optimized five-bar linkages with non-circular gears for exact path generation [J]. Mechanism and

Machine Theory, 2009, 44(4): 751 ~ 760.

- 4 赵匀,高林弟,陈建能,等. 变形偏心非圆齿轮行星系分插机构设计和参数优化[J]. 农业机械学报, 2011,42(12):74~77. Zhao Yun, Gao Lindi, Chen Jianneng, et al. Design and parameters optimization of deformed eccentric non-circular gears transplanting mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(12):74~77. (in Chinese)
- 5 李建刚,周磊,赵巍,等. 在三轴插齿机上实现非圆齿轮磨齿运动的方法[J]. 哈尔滨工业大学学报,2010,42(11):1749~1752.

Li Jiangang, Zhou Lei, Zhao Wei, et al. Noncircular gear grinding method using gear generator with form-grinding [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010,42(11):1749 ~1752. (in Chinese)

- 6 胡赤兵,丁和艳,严克明,等. 非圆斜齿轮滚切加工的联动控制模型[J]. 兰州理工大学学报, 2005,31(1):43~45. Hu Chibing, Ding Heyan, Yan Keming, et al. Simultaneous-control model for hobbing of noncircular helical gears [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2005,31(1):43~45. (in Chinese)
- 7 Meredith L G, Matthias, Radestock. A reflective higher-order calculus [J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2005, 141(5): 49 ~ 67.
- 8 刘永平,吴序堂,李鹤岐. 常见的凸封闭节曲线非圆齿轮副设计[J]. 农业机械学报,2007,38(6):143~146. Liu Yongping, Wu Xutang, Li Heqi. Study on some common close convex pitch curves of noncircular gear pair [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007,38(6):143~146. (in Chinese)
- 9 Joao E S P, Adelir J S, Janete P A, et al. A heuristic algorithm for pattern identification in large multivariate analysis of geophysical data sets [J]. Computers & Geosciences, 2010,36(1):83 ~90.
- 10 Fei J Y, Deng R, Zhang Z, et al. Research on embedded CNC device based on ARM and FPGA [J]. Procedia Engineering, 2011, 16(11):818 ~ 824.

#### (上接第263页)

- 9 Hilker T, Coops N C, Coggins S B, et al. Detection of foliage conditions and disturbance from multi-angular high spectral resolution remote sensing [J]. Remote Sensing of Environment, 2009, 113(2): 421 ~434.
- 10 Demir B, Erturk S. Empirical mode decomposition of hyperspectral images for support vector machine classification [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2010, 48(11): 4071 ~ 4084.
- 11 Khazai S, Safari A, Mojaradi B, et al. Improving the SVDD approach to hyperspectral image classification [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2012, 9(4): 594 ~ 598.
- 12 Tax D M J, Duin R P W. Support vector data description [J]. Machine Learning, 2004, 54(1): 45~66.
- 13 Zhang Li, Zhou Weida, Jiao Licheng. Pre-extracting support vectors for support vector machine [C] // International Conference on Signal Processing, Beijing, 2000: 1 432 ~ 1 435.
- 14 Huang Weimin, Shen Leping. Weighted support vector regression algorithm based on data descripton [C] // ISECS International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management, Guangzhou, 2008: 250 ~ 254.
- 15 Mu T, Nandi A K. Multiclass classification based on extended support vector data description [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B: Cybernetics, 2009, 39(5): 1 206 ~ 1 216.
- 16 Park S, Kim B, Lee J, et al. GGO nodule volume-preserving nonrigid lung registration using GLCM texture analysis [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2011, 58(10): 2 885 ~ 2 894.