doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.05.048

机械臂三次样条路径规划系数递推算法*

安　凯

(山东航天电子技术研究所，烟台 264003)

摘要：针对机械臂三次样条路径规划涉及高阶矩阵求逆，因而算法复杂、响应速度慢的问题，提出一种不需要求逆矩阵运算的三次样条系数的递推算法，递推算法的初始值由递推公式表示的边界条件获得。按照三次样条的3种不同的边界条件，分别给出了递推算法初始值的确定方法和递推公式。仿真结果表明，改进的算法不仅运算简单，而且可以获得理想的三次样条系数。

关键词：机械臂　路径规划　三次样条　递推算法

中图分类号：TP242　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2013)05-0276-05

Coefficient Recursive Algorithm for Manipulator Trajectory Planning Based on Cubic Splines

An Kai

(*Shandong Aerospace Electro-technology Institute*, *Yantai* 264003, *China*)

Abstract: The algorithm for manipulator trajectory planning based on cubic splines relates to the inversion of the matrix with higher order, and hence, the operation becomes very complex. As a result, the response rate of the manipulator was reduced certainly. In view of this situation, a recursive algorithm to obtain the coefficients of cubic splines was put forward. The recursive algorithm did not require any matrix inversion, and the initial values of recursion came from the boundary conditions expressed by recursive formula. The methods to determine initial values and the recursive formula were presented according to three different boundary conditions. Simulation result showed that the improved algorithm not only can simplify the computes, but also can obtain desired coefficients of cubic splines.

Key words: Manipulator　Trajectory planning　Cubic splines　Recursive algorithm

引言

通常，机械臂的运动轨迹应尽可能光滑，避免剧烈的位置、速度和加速度变化。事实上，剧烈的运动需要消耗极大的能量，而驱动电动机由于自身物理限制又不能提供如此大的能量；另一方面，剧烈的运动可能产生与其它物体之间的碰撞，这也是需要避免的情形。在一次“抓—放”操作过程中，机械臂的末端需要从始点移动到终点，其间要求经过的点通常称为支撑点。所谓运动轨迹的光滑是指始点和终点间的轨迹曲线是具有任意次导数的函数。一种最常见、最容易处理的光滑函数是多项式[1~6]，然而，多项式的次数一旦确定，能够任意选择的支撑点的个数随之确定。在实际应用中，为获得更精确的路径以避免与障碍物的碰撞，在始点和终点间需要指定更多的支撑点。若采用多项式路径规划，多项式的次数必须增加，但这样势必增加计算的复杂性，影响机械臂的控制响应速度和操作的实时性[7~10]。为此，文献[11]将三次样条方法引入机械臂路径规划中，并针对不同的边界条件，给出了三次样条函数中各系数的确定方法。与多项式路径规划方法相比，三次样条函数方法可以指定任意多的支撑点，但

收稿日期：2012－09－26　修回日期：2012－11－30

＊国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2013CB733000)和国防科工局“十二五”项目(k0201210)

作者简介：安凯，研究员，博士后，主要从事光学工程、智能控制和机器人研究，E-mail：ankai2007@163.com

由于该方法涉及$(N-2)\times(N-2)$矩阵的求逆问题(其中N表示支撑点的个数)，因此运算量依然很大。为避免矩阵求逆问题，本文将采用递推方法求解三次样条函数中各个系数，而递推公式的初始值则是由递推公式表示的边界条件获得，不必求逆矩阵即可确定三次样条函数中各个系数。

1　机械臂三次样条路径规划问题

由于三维空间中的路径规划问题可以分解为 3 个$x-s$平面内的路径规划问题，其中x表示时间，$y=s(x)$表示空间位置 3 个坐标之一，因此机械臂路径规划问题可以描述为给定$x-s$平面内的N个支撑点$P(x_k,s_k)(k=1,2,\cdots,N)$，求一条经过它们的光滑曲线，使该曲线达到某些最优性条件。

三次样条的一个优点是在约束条件$y_k=s(x_k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$之下，泛函

$$F=\int_0^T s''(x)^2\mathrm{d}x$$

达到最小值，即在所有经过这N个支撑点的位移函数中，三次样条使加速度模的平方对时间的积分达到最小值[11]。式中，T表示自变量的上限。

若$P(x_k,s_k)$和$P(x_{k+1},s_{k+1})$是 2 个相邻的支撑点，定义于这 2 个点之间的第k个三次多项式$s_k(x)$可表示为

$$s_k(x)=A_k(x-x_k)^3+B_k(x-x_k)^2+C_k(x-x_k)+D_k$$

其中A_k、B_k、C_k、D_k为待定系数，$x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}(k=1,2,\cdots,N-1)$。因此$D_k=s_k=s_k(x_k)$，且

$$\begin{cases}D_k=s_k\\A_k\Delta^3x_k+B_k\Delta^2x_k+C_k\Delta x_k+D_k=D_{k+1}\\3A_k\Delta^2x_k+2B_k\Delta x_k+C_k=C_{k+1}\\6A_k\Delta x_k+2B_k=2B_{k+1}\end{cases}\tag{1}$$

其中$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$。将第 1 个方程代入第 2 个方程中得

$$\begin{bmatrix}\Delta^2x_k&\Delta x_k&1\\3\Delta^2x_k&2\Delta x_k&1\\3\Delta x_k&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_k\\B_k\\C_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s_{k+1}-s_k}{\Delta x_k}\\C_{k+1}\\B_{k+1}\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix}A_k\\B_k\\C_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\Delta^3x_k}&-\dfrac{1}{\Delta^2x_k}&\dfrac{1}{\Delta x_k}\\\dfrac{-3}{\Delta^2x_k}&\dfrac{3}{\Delta x_k}&-2\\\dfrac{3}{\Delta x_k}&-2&\Delta x_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{k+1}-s_k\\C_{k+1}\\B_{k+1}\end{bmatrix}\tag{2}$$

因此式(1)的解为

$$\begin{bmatrix}A_k\\B_k\\C_k\\D_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\dfrac{1}{\Delta^3x_k}&-\dfrac{1}{\Delta^2x_k}&\dfrac{1}{\Delta x_k}\\0&\dfrac{-3}{\Delta^2x_k}&\dfrac{3}{\Delta x_k}&-2\\0&\dfrac{3}{\Delta x_k}&-2&\Delta x_k\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_k\\s_{k+1}-s_k\\C_{k+1}\\B_{k+1}\end{bmatrix}\tag{3}$$

由此只要通过边界条件确定A_{N-1}、B_{N-1}、C_{N-1}，三次样条的所有系数都可以确定。通常，三次样条的边界条件有：第 1 种边界条件为$s'_1(x_1)=s'_1$，$s'_{N-1}(x_N)=s'_N$；第 2 种边界条件为$s''_1(x_1)=s''_{N-1}(x_N)=0$；第 3 种边界条件为$s_1(x_1)=s_{N-1}(x_N)$，$s'_1(x_1)=s'_{N-1}(x_N)$，$s''_1(x_1)=s''_{N-1}(x_N)$。

2　第 1 种边界条件

由式(2)得

$$\begin{bmatrix}B_k\\C_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&\dfrac{3}{\Delta x_k}\\\Delta x_k&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{k+1}\\C_{k+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{-3}{\Delta^2x_k}\\\dfrac{3}{\Delta x_k}\end{bmatrix}(s_{k+1}-s_k)$$

记

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}-2&\dfrac{3}{\Delta x_i}\\\Delta x_i&-2\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{V}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{-3}{\Delta^2x_i}\\\dfrac{3}{\Delta x_i}\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix}B_{N-2}\\C_{N-2}\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}_{N-2}\begin{bmatrix}B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}+\boldsymbol{V}_{N-2}(s_{N-1}-s_{N-2})$$

$$\begin{bmatrix}B_{N-3}\\C_{N-3}\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}_{N-3}\boldsymbol{U}_{N-2}\begin{bmatrix}B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}+\boldsymbol{U}_{N-3}\boldsymbol{V}_{N-2}(s_{N-1}-s_{N-2})+\boldsymbol{V}_{N-3}(s_{N-2}-s_{N-3})$$

递推得

$$\begin{bmatrix}B_1\\C_1\end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{N-2}\boldsymbol{U}_i\begin{bmatrix}B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}+\sum_{k=1}^{N-2}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{U}_i\right)\boldsymbol{V}_k(s_{k+1}-s_k)\tag{4}$$

记$\begin{bmatrix}u_{11}^{(k)}&u_{12}^{(k)}\\u_{21}^{(k)}&u_{22}^{(k)}\end{bmatrix}=\prod\limits_{k=1}^{k}\boldsymbol{U}_i$，则

$$C_1=u_{21}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{22}^{(N-2)}C_{N-1}+\sum_{k=1}^{N-2}\left(\frac{3u_{22}^{(k-1)}}{\Delta x_k}-\frac{3u_{21}^{(k-1)}}{\Delta^2x_k}\right)(s_{k+1}-s_k)\tag{5}$$

而由$s_1(x_1)=s_1$，$s_{N-1}(x_N)=s_N$，$s'_1(x_1)=s'_1$，$s'_{N-1}(x_N)=s'_N$得

$$A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}+s_{N-1}=s_N$$

$$C_1=s'_1\quad 3A_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+2B_{N-1}\Delta x_{N-1}+C_{N-1}=s'_N$$

记$e=\sum\limits_{k=1}^{N-2}\left(\dfrac{3u_{22}^{(k-1)}}{\Delta x_k}-\dfrac{3u_{21}^{(k-1)}}{\Delta^2x_k}\right)(s_{k+1}-s_k)$则得

$$\begin{cases}u_{21}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{22}^{(N-2)}C_{N-1}=s_1'-e\\A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}=s_N-s_{N-1}\\3A_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+2B_{N-1}\Delta x_{N-1}+C_{N-1}=s_N'\end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix}0 & u_{21}^{(N-2)} & u_{22}^{(N-2)}\\\Delta^2x_{N-1} & \Delta x_{N-1} & 1\\3\Delta^2x_{N-1} & 2\Delta x_{N-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{N-1}\\B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1'-e\\\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\s_N'\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix}A_{N-1}\\B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\Delta x_{N-1}} & \dfrac{\mu}{\Delta^2x_{N-1}} & \dfrac{w}{\Delta^2x_{N-1}}\\-2 & 3u_{22}^{(N-2)} & -u_{22}^{(N-2)}\\\Delta x_{N-1} & -3u_{21}^{(N-2)} & u_{21}^{(N-2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1'-e\\\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\s_N'\end{bmatrix}$$

其中

$$\lambda=\Delta x_{N-1}u_{22}^{(N-2)}-2u_{21}^{(N-2)}$$
$$\mu=u_{21}^{(N-2)}-2\Delta x_{N-1}u_{22}^{(N-2)}$$
$$w=\Delta x_{N-1}u_{22}^{(N-2)}-u_{21}^{(N-2)}$$

于是

$$\begin{bmatrix}A_{N-1}\\B_{N-1}\\C_{N-1}\\D_{N-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}\dfrac{s_1'-e}{\Delta x_{N-1}} & \dfrac{\mu(s_N-s_{N-1})}{\Delta^3x_{N-1}} & \dfrac{ws_N'}{\Delta^2x_{N-1}} & 0\\-2(s_1'-e) & 3u_{22}^{(N-2)} & -u_{22}^{(N-2)} & 0\\\Delta x_{N-1} & -3u_{21}^{(N-2)} & u_{21}^{(N-2)} & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s_1'-e\\\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\s_N'\\s_{N-1}\end{bmatrix}$$

由此利用式(3)即可求出三次样条的所有其余系数。

3 第 2 种边界条件

由 $s_1(x_1)=s_1, s_{N-1}(x_N)=s_N, s_1''(x_1)=s_{N-1}''(x_N)=0$ 得

$$D_1=s_1$$
$$A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}+s_{N-1}=s_N$$
$$3A_{N-1}\Delta x_{N-1}+B_{N-1}=B_1$$

而由式(4)得

$$B_1=u_{11}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{12}^{(N-2)}C_{N-1}+\sum_{k=1}^{N-2}\left(\frac{3u_{12}^{(k-1)}}{\Delta x_k}-\frac{3u_{11}^{(k-1)}}{\Delta^2x_k}\right)(s_{k+1}-s_k)\qquad(6)$$

于是若记 $d=\sum_{k=1}^{N-2}\left(\dfrac{3u_{12}^{(k-1)}}{\Delta x_k}-\dfrac{3u_{11}^{(k-1)}}{\Delta^2x_k}\right)(s_{k+1}-s_k)$ 则得方程组

$$\begin{cases}u_{11}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{12}^{(N-2)}C_{N-1}=-d\\A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}=s_N-s_{N-1}\\3A_{N-1}\Delta x_{N-1}+B_{N-1}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}0 & u_{11}^{(N-2)} & u_{12}^{(N-2)}\\\Delta^2x_{N-1} & \Delta x_{N-1} & 1\\1 & \dfrac{1}{3\Delta x_{N-1}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{N-1}\\B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-d\\\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\0\end{bmatrix}$$

解之得

$$\begin{bmatrix}A_{N-1}\\B_{N-1}\\C_{N-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\bar{\lambda}}\begin{bmatrix}3 & -3u_{12}^{(N-2)} & 3\Delta^2x_{N-1}u_{12}^{(N-2)}\\-2\Delta x_{N-1} & 3u_{11}^{(N-2)} & -3\Delta^2x_{N-1}u_{11}^{(N-2)}\\-\dfrac{1}{\Delta x_{N-1}} & \dfrac{u_{12}^{(N-2)}}{\Delta x_{N-1}} & \bar{\mu}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-d\\\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\0\end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{\lambda}=3u_{11}^{(N-2)}-2u_{12}^{(N-2)}\Delta x_{N-1}$$
$$\bar{\mu}=3u_{11}^{(N-2)}-3\Delta x_{N-1}u_{12}^{(N-2)}=$$
$$\frac{1}{3u_{11}^{(N-2)}-2u_{12}^{(N-2)}\Delta x_{N-1}}\begin{bmatrix}-3d-3u_{12}^{(N-2)}\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\2d\Delta x_{N-1}+3u_{11}^{(N-2)}\dfrac{s_N-s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}}\\\dfrac{d}{\Delta x_{N-1}}+\dfrac{u_{12}^{(N-2)}(s_N-s_{N-1})}{\Delta^2x_{N-1}}\end{bmatrix}$$

结合 $D_{N-1}=s_{N-1}$ 便得到了 A_{N-1}、B_{N-1}、C_{N-1}、D_{N-1} 的解,由此,利用式(3)即可求出三次样条的所有其余系数。

4 第 3 种边界条件

由 $s_1(x_1)=s_{N-1}(x_N), s_1'(x_1)=s'_{N-1}(x_N)$, $s_1''(x_1)=s_{N-1}''(x_N)$ 得

$$D_1=s_1$$
$$A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}+s_{N-1}=s_1$$
$$3A_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+2B_{N-1}\Delta x_{N-1}+C_{N-1}=C_1$$
$$3A_{N-1}\Delta x_{N-1}+B_{N-1}=B_1$$

结合式(5)、(6)得

$$\begin{cases}A_{N-1}\Delta^3x_{N-1}+B_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+C_{N-1}\Delta x_{N-1}+s_{N-1}=s_1\\u_{11}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{12}^{(N-2)}C_{N-1}+d=3A_{N-1}\Delta x_{N-1}+B_{N-1}\\u_{21}^{(N-2)}B_{N-1}+u_{22}^{(N-2)}C_{N-1}+e=\\\quad 3A_{N-1}\Delta^2x_{N-1}+2B_{N-1}\Delta x_{N-1}+C_{N-1}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} A_{N-1}\Delta^3 x_{N-1} + B_{N-1}\Delta^2 x_{N-1} + C_{N-1}\Delta x_{N-1} = s_1 - s_{N-1} \\ 3A_{N-1}\Delta x_{N-1} + B_{N-1}(1 - u_{11}^{(N-2)}) - u_{12}^{(N-2)} C_{N-1} = d \\ 3A_{N-1}\Delta^2 x_{N-1} + B_{N-1}(2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)}) + \\ \quad C_{N-1}(1 - u_{22}^{(N-2)}) = e \end{cases}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 x_{N-1} & \Delta x_{N-1} & 1 \\ 3\Delta x_{N-1} & 1 - u_{11}^{(N-2)} & -u_{12}^{(N-2)} \\ 3\Delta^2 x_{N-1} & 2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)} & 1 - u_{22}^{(N-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s_1 - s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}} \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

记

$$A = \begin{bmatrix} \Delta^2 x_{N-1} & \Delta x_{N-1} & 1 \\ 3\Delta x_{N-1} & 1 - u_{11}^{(N-2)} & -u_{12}^{(N-2)} \\ 3\Delta^2 x_{N-1} & 2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)} & 1 - u_{22}^{(N-2)} \end{bmatrix}$$

则

$$\det(A) = \Delta^2 x_{N-1}\left[(u_{11}^{(N-2)} + 2)(u_{22}^{(N-2)} + 2) - (\Delta x_{N-1} + u_{21}^{(N-2)})\left(u_{12}^{(N-2)} + \frac{3}{\Delta x_{N-1}}\right)\right] = \Delta^2 x_{N-1}(u_{11}^{(N-2)} + 2)(u_{22}^{(N-2)} + 2) - \Delta x_{N-1}(\Delta x_{N-1} + u_{21}^{(N-2)})(\Delta x_{N-1} u_{12}^{(N-2)} + 3)$$

A 的各代数余子式为

$$A_{11} = (1 - u_{11}^{(N-2)})(1 - u_{22}^{(N-2)}) + u_{12}^{(N-2)}(2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)})$$

$$A_{21} = (2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)}) - \Delta x_{N-1}(1 - u_{22}^{(N-2)})$$

$$A_{31} = -u_{12}^{(N-2)}\Delta x_{N-1} - (1 - u_{11}^{(N-2)})$$

$$A_{12} = -3\Delta x_{N-1}(1 - u_{22}^{(N-2)}) - 3\Delta^2 x_{N-1} u_{12}^{(N-2)}$$

$$A_{22} = (1 - u_{22}^{(N-2)})\Delta^2 x_{N-1} - 3\Delta^2 x_{N-1}$$

$$A_{32} = \Delta^2 x_{N-1} u_{12}^{(N-2)} + 3\Delta x_{N-1}$$

$$A_{13} = 3\Delta x_{N-1}(2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)}) - 3\Delta^2 x_{N-1}(1 - u_{11}^{(N-2)})$$

$$A_{23} = 3\Delta^3 x_{N-1} - \Delta^2 x_{N-1}(2\Delta x_{N-1} - u_{21}^{(N-2)})$$

$$A_{33} = \Delta^2 x_{N-1}(1 - u_{11}^{(N-2)}) - 3\Delta^2 x_{N-1}$$

$$\begin{bmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s_1 - s_{N-1}}{\Delta x_{N-1}} \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

结合 $D_{N-1} = s_{N-1}$ 便得到了 A_{N-1}、B_{N-1}、C_{N-1}、D_{N-1} 的解，由此，利用式(3)可求出三次样条所有其余系数。

5　仿真

取 $s(1) = 1, s(11) = 100, x_i = i(i = 1, \cdots, 11)$；在区间(1,100)中随机抽取 9 个整数，依大小排列后得到数列 5、17、35、40、41、73、79、89、91 分别作为 $s(2), \cdots, s(10)$。

以第 1 种边界条件为例，假定边界条件为 $s'(1) = 2, s'(11) = 4$。采用上述相关边界条件的算法，求出的三次样条的系数见表 1。

表 1　三次样条系数

Tab. 1　Coefficient of cubic splines

i	A	B	C	D
1	1.197 1	0.802 9	2.000 0	1
2	0.408 6	4.394 3	7.197 1	5
3	−4.831 6	5.620 1	17.211 5	17
4	−0.082 4	−8.874 6	13.957 0	35
5	14.161 0	−9.121 7	−4.039 3	40
6	−21.561 5	33.361 2	20.200 3	41
7	15.085 1	−31.323 3	22.238 2	73
8	−8.778 9	13.932 0	4.846 9	79
9	8.030 6	−12.404 8	6.374 3	89
10	−8.343 5	11.687 1	5.656 3	91

由三次样条的系数可得，$s_1(1) = D_1 = 1$，$s_{10}(11) = A_{10} + B_{10} + C_{10} + D_{10} = 100$，$s'_1(1) = C_1 = 2$，$s'_{10}(11) = 3A_{10} + 2B_{10} + C_{10} = 4$。因此所有边界条件满足。

6　结束语

采用文献[5]所述的方法，当支撑点的个数为 N 时涉及$(N-2)\times(N-2)$矩阵的求逆。以 $N = 102$ 为例，涉及一个 100×100 矩阵的求逆问题，运算十分复杂，需要较长的运算时间。而且，随着支撑点个数的增加，运算量增加的倍数与 N 同阶。因此，当采用文献[11]所述的方法时，为保证机械臂的响应速度，支撑点的个数不能取得太多，否则，由于涉及高阶矩阵的求逆问题，将导致运行缓慢，甚至无法使用。采用本文所述的方法由于不涉及矩阵求逆问题，支撑点个数的增加不会引起运算量的显著提高，因此对支撑点的个数无任何限制，运算速度也极大提高，甚至使原来不能使用的规划问题变得可行，具有较大的实用价值。

参 考 文 献

1　安凯，马佳光，付承毓．基于多项式系的类模糊神经网络与非线性系统的控制[J]．光电工程，2002，29(5)：1～4．
Aa Kai, Ma Jiaguang, Fu Chengyu. A quasi-fuzzy neural network for polynomial series and the control of nonlinear system[J]. Opto-electronic Engineering, 2002, 29(5): 1～4. (in Chinese)

2 安凯,李向阳. 轮式移动机器人的最优变道路径规划[J]. 农业机械学报, 2012, 43(7): 179~184.
An Kai, Li Xiangyang. Optimal path planning for lane changing of wheeled mobile robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(7): 179~184. (in Chinese)
3 安凯,马佳光. 机械臂刚体运动螺旋极小模方程的解系[J]. 光电工程,2010,37(7): 8~11.
Aa Kai, Ma Jiaguang. Solution system of minimum-magnitude equation about the screw of a rigid-body motion of manipulator[J]. Opto-electronic Engineering,2010,37(7):8 ~11. (in Chinese)
4 Wang Feifei, An Kai. A fast algorithm for velocity and acceleration at manipulator's end-effector[C]//2011 First International Conference on Instrumentation & Measurement, Computer, Communication and Control, Beijing , China, 2011.
5 安凯, 韩爱丽,宋黎定. 一种新的自主导航技术——单相机视觉系统[J]. 激光与红外,2005,35(12):987~989.
An Kai, Han Aili, Song Liding. A new autonomous navigation technique—the vision system with single camera[J]. Laser & Infrared, 2005,35(12):987~989. (in Chinese)
6 安凯,汪红熳,任戈,等. 四象限探测仪测角新算法[J]. 激光与红外,2001,31(6):328~329.
An Kai,Wang Hongman, Ren Ge, et al. A new angle-measurement algorithm of the detector with four quadrants[J]. Laser & Infrared, 2001, 31(6):328~329. (in Chinese)
7 安凯,马佳光. 基于空间飞行器的来袭激光方向探测[J]. 光电工程,2011,38(5):1~4.
An Kai, Ma Jiaguang. Attack direction of laser based on the CCD detection[J]. Opto-electronic Engineering, 2011,38(5):1~4. (in Chinese)
8 安凯, 马佳光. 一种用于交会对接的 CCD 快速测量方法[J]. 光电工程, 2011,38(6): 1~6.
An Kai,Ma Jiaguang. A fast CCD measurement method used in rendezvous and docking [J]. Opto-electronic Engineering,2011, 38(6): 1~6. (in Chinese)
9 Lloyd J, Parker M, McClain R. Extending the RCCL programming environment to multiple robots and processors[C]//Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Robotics & Automation, 1988: 465~469.
10 Spong M, Vidyasagar M. Robot dynamics and control [M]. New York: Wiley, 1989.
11 Jorge Angles. Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms[M]. Berlin: Springer, 2002.