doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.04.044

浮动推杆盘形凸轮机构广义第Ⅱ类机构综合问题*

常　勇　林荣富　李延平
(集美大学机械工程学院，厦门 361021)

摘要：通过坐标系建立、浮动数轴概念提出和推程前半/后半区段划分，特别是通过引入偏距，在预定连杆方位线——一维综合前提框架下，关于偏置式机构，提出整程区间套存在性(态)内涵及求解原理，滚子中心、凸轮理论基圆半径的存在性(态)，非劣解、劣解区间套和区间最优解等的求解理论方法。随之，对偏距解得其有解区间套，在非预定连杆方位线——二维综合前提框架下，关于偏置/正置式机构，提出整程区域套——机构解全域、非劣解、劣解区域套和全域最优解等新概念及其求解理论方法。在已有正置式机构第Ⅱ类综合问题研究成果基础上，研究解决了偏置式机构的一维和偏置/正置式机构的二维第Ⅱ类综合问题。拓展丰富了机构综合问题的解空间和优解空间，阐释论证了引入偏置式机构并开展研究具有重要的理论价值和实际意义。通过两个机构综合实例，论证了偏置式较正置式机构的优越性。

关键词：浮动推杆　浮动数轴　整程区间(域)套　机构解全域　非劣解区域套　最优解
中图分类号：TH112.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2013)04-0252-10

General Class Ⅱ Synthesis of Disc Cam Mechanism with Floating Push Rod

Chang Yong　Lin Rongfu　Li Yanping
(*College of Mechanical Engineering*, *Jimei University*, *Xiamen* 361021, *China*)

Abstract: By establishing a coordinate system, introducing the concept of rotation floating axis, dividing the first/second half period on the rise, especially introducing offset, under the premise framework of the 1-D synthesis on the scheduled bearing line of linkage, the existing form and solution concept of the whole nested interval, the existing form of roller center and theory base circle radius, and the solution theory of inferior/non-inferior solution nested region and the optimal solution of interval were presented. Accordingly, the solution set of offset mechanism were solved. Under the premise framework of the 2-D synthesis on the non-scheduled bearing line of linkage, the proposed concept and its solution theory of whole mechanism solution, inferior/non-inferior solution nested region and the optimal solution of the whole solution were presented. Based on the research result of the class Ⅱ synthesis problem of the non-offset mechanism, the 1-D and 2-D class Ⅱ synthesis of offset mechanism were solved. It enriched the solution space and optimal solution space, and demonstrated the important theoretical value and practical significance of the offset mechanism. Finally, by providing two synthesis examples, it demonstrated that the offset mechanism was greatly superior to the non-offset mechanism.

Key words: Floating push rod　Rotation floating axis　Whole nested interval/region　Whole mechanism solution　Non-inferior solution nested region　The optimal solution

引言

2010年作者概括、归纳出作平面运动滚子从动件即浮动推杆盘形凸轮机构的Ⅰ、Ⅱ两大类机构综合问题；第Ⅱ机构综合表述为[1]：已知连杆从动构件系统的运动学尺寸、输出件推程起始/终止位置和

收稿日期：2012-04-16　修回日期：2012-05-29
*国家自然科学基金资助项目(51175224)和福建省自然科学基金资助项目(2010J01302、2006J0169)
作者简介：常勇，教授，主要从事凸轮与连杆机构学、机构起源与进化理论研究，E-mail：changyong@jmu.edu.cn
通讯作者：李延平，教授，主要从事机构学、RE/RP/CAE研究，E-mail：ypli@jmu.edu.cn

(角)位移规律、许用压力角、凸轮轴心位置和滚子中心所在作平面运动连杆的某一方位线上等条件，求解滚子中心的容许选择区段、凸轮基圆半径的许用取值范围等。2012 年再提出向径标刻线等新概念，研究解决了槽道、共轭和等径等形锁合凸轮机构的第Ⅱ类综合问题[2]。根据前述研究思路，分别将文献[1～2]、本文讨论的第Ⅱ类机构综合问题定义为狭义第Ⅱ类机构综合问题和广义第Ⅱ类机构综合问题。

本文通过选取更具一般性的偏置式机构为研究对象，以文献[1～2]研究成果为基础，在预定连杆方位线—一维综合前提框架下，提出瞬时、整程区间套存在性(态)内涵及求解原理，滚子中心、凸轮理论基圆半径的存在性(态)、非劣解、劣解区间套和区间最优解等的求解理论方法。随之，将偏距作为牵引变量，搜索解得其有解区间套，在非预定连杆方位线—二维综合前提框架下，提出整程区域套、非劣解、劣解区域套和全域最优解等的求解理论方法。在解决正置式机构第Ⅱ类机构综合问题基础上，解决偏置式机构的一维、二维第Ⅱ类机构综合问题，延伸第Ⅱ类机构综合问题的解空间和优解空间。

1　广义第Ⅱ类机构综合问题的准确表述

源于高速印刷机机构[1]——正置式机构的拓展/引伸构型——偏置式机构，如图 1 所示。由凸轮 1、连杆 2、摇块 3、滚子 4、摇杆 5 和机架 0 组成，凸轮 1、摇杆 5 分别为输入和输出件。

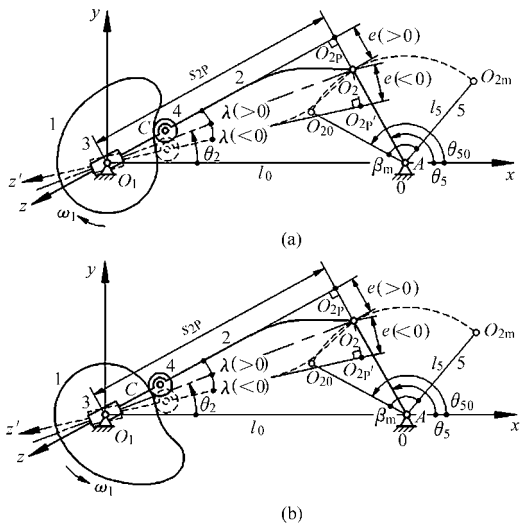

图 1　高速印刷机(正置式)机构的拓展/引伸构型——偏置式机构

Fig. 1　Expanding mechanism configuration of high speed printing machine mechanism (non-offset mechanism)—offset mechanism

(a) 凸轮顺时针转动　(b) 凸轮逆时针转动

其第Ⅱ类机构综合问题准确描述为：已知机架和摇杆长度 l_0、l_5，偏距 e，摇杆推程始、终位置 $O_{20}A$、$O_{2m}A$，摇杆的推程初位角 θ_{50}、行程角 β_m 和推程角位移规律 $\beta=\beta(\theta_1)$；推程运动角 Φ_0，推程许用压力角 $[\alpha]$，凸轮 1、摇块 3 和机架 0 在 O_1 点处复合铰接，滚子中心 C 位于摇块 3、连杆 2 的移动副导路方位线 O_1O_{2P} 上。

求解：①一维综合问题：瞬时、整程区间套，滚子中心 C、凸轮理论基圆半径 r_0 的存在性和存在性态，非劣解、劣解区间套，区间最优解的求解确定等。②二维综合问题：e 有解区间套，整程区域套、非劣解、劣解区域套和全域最优解的求解等。

本文讨论的机构综合问题，由原初正置式机构的一维综合问题[1～2]，上升为偏置式机构的一维、二维综合问题，纳入广义第Ⅱ类机构综合问题。

2　预备公式建立、浮动数轴引入和推程前半、后半区段划分

(1) 预备公式的建立

建直角坐标系 O_1xy 如图 1 所示。选凸轮轴心与原点 O_1 重合，x 轴正向与 O_1A 一致，θ_{2P}、θ_5 分别为连杆导路方位线 O_1O_{2P}、摇杆 AO_2 与 x 轴正向夹角，θ_1 为凸轮转角。

建立封闭矢量方程(从略)，推演得到连杆 2 导路段 O_1O_{2P} 的长度和位置角

$$s_{2P}=(s_2^2-e^2)^{1/2}=[l_0^2+l_5^2+2l_0l_5\cos(\theta_{50}-\beta)-e^2]^{1/2} \tag{1}$$

$$\theta_{2P}=\theta_2+\lambda=\arccos((s_2^2+l_0^2-l_5^2)/(2s_2l_0))+\arcsin(e/s_2) \tag{2}$$

式(2)及后面的式(3)、(5)～(9)中，λ、e 皆有正、负和零之分。

如图 1 所示，分为正偏置($e>0$、$\lambda>0$)、零偏置($e=0$、$\lambda=0$)和负偏置($e<0$、$\lambda<0$)3 种情况。

显然，文献[1]讨论的为上述 3 种情况之中零偏置亦即正置式($e=0$、$\lambda=0$)时的情况。

连杆 2 的类角速度

$$\mathrm{d}\theta_{2P}/\mathrm{d}\theta_1=\mathrm{d}\theta_2/\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\theta_1 \tag{3}$$

其中

$$\mathrm{d}\theta_2/\mathrm{d}\theta_1=-l_5(\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\theta_1)[l_5+l_0\cos(\theta_{50}-\beta)]/[l_0^2+l_5^2+2l_0l_5\cos(\theta_{50}-\beta)] \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\theta_1=-l_0l_5e(\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\theta_1)\sin(\theta_{50}-\beta)/\{[l_0^2+l_5^2+2l_0l_5\cos(\theta_{50}-\beta)][l_0^2+l_5^2+2l_0l_5\cos(\theta_{50}-\beta)-e^2]^{1/2}\} \tag{5}$$

绝对瞬心 P_{20} 的坐标

$$\begin{cases} x_{P20} = l_0 \tan(\theta_{50} - \beta) / [\tan(\theta_{50} - \beta) + \cot(\theta_2 + \lambda)] \\ y_{P20} = -l_0 \tan(\theta_{50} - \beta) \cot(\theta_2 + \lambda) / [\tan(\theta_{50} - \beta) + \cot(\theta_2 + \lambda)] \end{cases} \tag{6}$$

选取 $P_{10}P_{20}$ 为基准线段，据定比分点原理[4]，相对瞬心 P_{21} 的坐标

$$x_{P21} = \pm [|d\theta_{2P}/d\theta_1| / (\pm |d\theta_{2P}/d\theta_1| - 1)] \cdot [l_0 \tan(\theta_{50} - \beta) / [\tan(\theta_{50} - \beta) + \cot(\theta_2 + \lambda)] \tag{7}$$

$$y_{P21} = \pm [|d\theta_{2P}/d\theta_1| / (\pm |d\theta_{2P}/d\theta_1| - 1)] [-l_0 \cdot \tan(\theta_{50} - \beta) \cot(\theta_2 + \lambda)] / [\tan(\theta_{50} - \beta) + \cot(\theta_2 + \lambda)] \tag{8}$$

式(7)和(8)中，各“±”的“+”号对应同摆式机构，而“-”号对应异摆式机构[1]。

如图 2 所示，瞬心 P_{20}、P_{10} 间的距离和瞬心 P_{20}、P_{21} 间的距离分别为

$$l_{P20P10} = (x_{P20}^2 + y_{P20}^2)^{1/2} \tag{9}$$

$$l_{P21P10} = (x_{P21}^2 + y_{P21}^2)^{1/2} \tag{10}$$

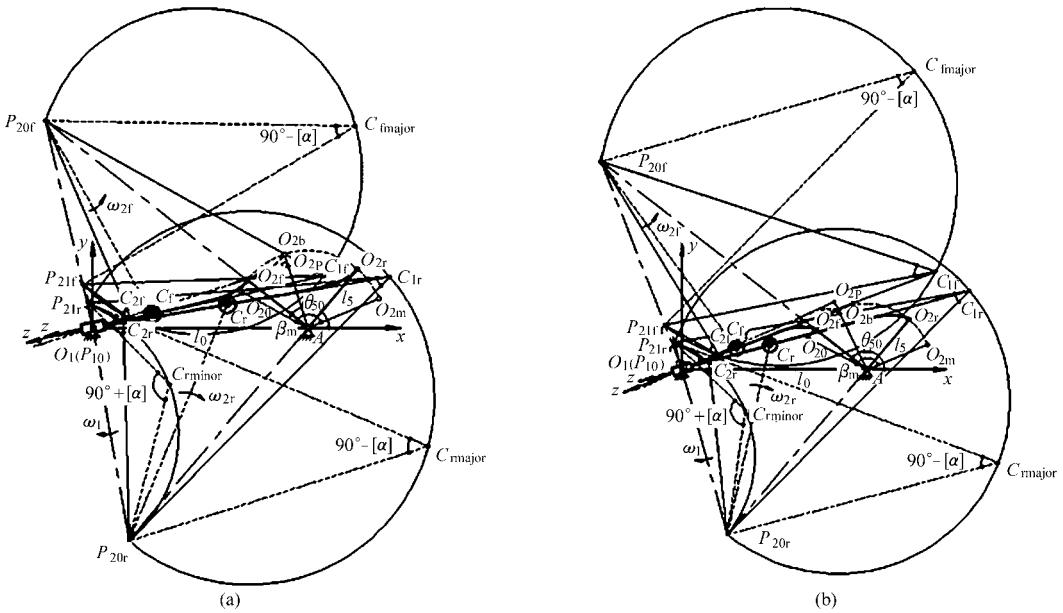

图 2 前、后半区段划分和“瞬时区间套”确定

Fig. 2 Division of former/latter half period on rise and determination of instantaneous nested interval

(a) 正偏置机构($e>0$) (b) 负偏置机构($e<0$)

l_{P20P10}、l_{P21P10} 是 θ_1 的一元函数。下文，将 l_{P20P10}、l_{P21P10} 简记为 l_{20} 和 l_{21}。

(2) 浮动数轴的概念

浮动数轴，系指固连于连杆 2 上，选取 O_{2P} 为原点、$O_{2P} \to O_1$ 为其正向，随连杆作平面运动的数轴 $O_{2P}z$，如图 1a、1b 所示。

建立起浮动数轴 $O_{2P}z$，导路方位线 O_1O_{2P} 上的点 C，可以其坐标 z_C 表示。

(3) 推程前半、后半区段划分和分界点的求解

如图 2 所示，P_{20}、P_{10} 为连杆 2、凸轮 1 的绝对瞬心、P_{21} 为连杆 2 与凸轮 1 的相对瞬心。推程中，可能时为同摆式、时为异摆式机构。

推程前半区段：摇杆 5 位于 $O_{20}A \to O_{2b}A$ 之间。P_{20f} 位于导路方位线 O_1O_{2P} 的上方。

推程后半区段：摇杆 5 位于 $O_{2b}A \to O_{2m}A$ 之间。P_{20r} 位于导路方位线 O_1O_{2P} 的下方。

分界点 O_{2b} 满足条件：$O_{2b}A \perp O_1O_{2P}$。此时 P_{20} 处垂直于 O_1O_{2P} 无穷远处，故有

$$\cos(180° - \theta_{50} + \beta^*) = (l_5 + e)/l_0 \tag{11}$$

其中 $$\beta^* = \arccos((l_5 + e)/l_0) + \theta_{50} - 180° \tag{12}$$

将 β^* 代入 $\beta = \beta(\theta_1)$，一维搜索解得对应凸轮转角 θ_1^*。

若以凸轮转角 θ_1 划分：推程前半区段有 $\theta_1 \in [0°, \theta_1^*]$，推程后半区段有 $\theta_1 \in [\theta_1^*, \Phi_0]$。

3 一维前提框架下的第Ⅱ类机构综合问题

本节研究，皆是在预定连杆导路方位线即预定偏距 e 的前提下进行的。

机构综合问题实质，是在预定连杆导路方位线上求解“整程区间套”的问题。对应机构解域，是一维的直线区间，如图 3a 所示。

据上，将一维前提框架下的第Ⅱ类机构综合问题，简称为一维综合问题。

3.1 凸轮—顺时针转动

3.1.1 瞬时、整程区间套的求解原理

如图 2 所示，前半区段—异摆式机构，后半区

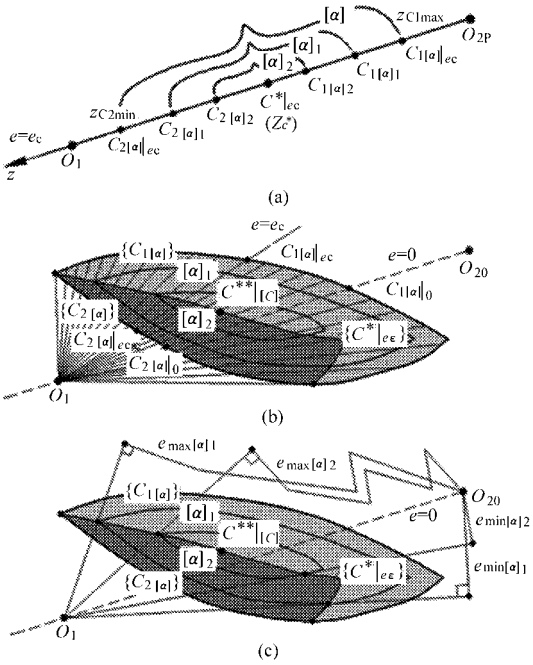

图 3　“整程区间套”与“整程区域套”

Fig. 3　Whole nested interval and whole nested region

（a）一维综合问题解域——“整程区间套”

（b）整程区域套——$C^{**}|_{[C]}$、$\{C^*|_{e\epsilon}\}$和$\{C_{1[\alpha]}\}$、$\{C_{2[\alpha]}\}$等

（c）整程区域套——$e_{\min[\alpha]}|_0$、$e_{\max[\alpha]}|_0$和$e_{\min[\alpha]}|_{ec}$、$e_{\max[\alpha]}|_{ec}$等

段—同摆式机构。整个推程，P_{21}始终位于导路方位线 O_1O_{2P}的上方。

（1）前半区段

任一瞬时位置，以 $P_{20f}P_{21f}$为弦、朝浮动数轴 $O_{2P}z$ 负向作优弧，使满足

$$\angle P_{20f}C_{fmajor}P_{21f}=90°-[\alpha] \tag{13}$$

理论上存在 3 种可能性：优弧与 $O_{2P}z$ 相交、相切和相离。

若为第一种—优弧交割 $O_{2P}z$ 得 C_{1f}、C_{2f}两点，满足

$$\angle P_{20f}C_{1f}P_{21f}=\angle P_{20f}C_{2f}P_{21f}=90°-[\alpha] \tag{14}$$

（2）后半区段

任一瞬时位置，以 $P_{20r}P_{21r}$为弦、朝旋浮数轴 $O_{2P}z$ 负向分别作优弧、劣弧，使满足

$$\angle P_{20r}C_{rmajor}P_{21r}=90°-[\alpha] \tag{15}$$

$$\angle P_{20r}C_{rminor}P_{21r}=90°+[\alpha] \tag{16}$$

仅存在 1 种可能性：优弧、劣弧必分别与 $O_{2P}z$ 相交。

优弧、劣弧交割 $O_{2P}z$ 得 C_{1r}、C_{2r}两点，满足

$$\angle P_{20r}C_{1r}P_{21r}=90°-[\alpha] \tag{17}$$

$$\angle P_{20r}C_{2r}P_{21r}=90°+[\alpha] \tag{18}$$

任一瞬时位置，满足 $\alpha\leqslant[\alpha]$条件滚子中心 C 的解集：位于导路方位线 O_1O_{2P}上、居于 C_1和 C_2之间的瞬时区间套$[z_{C1},z_{C2}]$。

整个推程，满足 $\alpha\leqslant[\alpha]$条件滚子中心 C 的解集：位于导路方位线 O_1O_{2P}上无数$[z_{C1},z_{C2}]$的交集——整程区间套$[z_{C1\max},z_{C2\min}]$。$z_{C1\max}$和 $z_{C2\min}$是无数$[z_{C1},z_{C2}]$之 z_{C1}、z_{C2}的最大和最小者。

3.1.2　滚子中心 C、凸轮理论基圆半径 r_0的存在性和存在性态

如图 2 所示，设 $\tau_C=l_{O1C}(>0)$，则有

$$\begin{cases}z_{C1}=s_{2P}-\tau_{C1}\\ z_{C2}=s_{2P}-\tau_{C2}\end{cases} \tag{19}$$

式中 $\tau_{C1}>\tau_{C2}$、$z_{C1}<z_{C2}$。“瞬时区间套”的解析表述为$[s_{2P}-\tau_{C1},s_{2P}-\tau_{C2}]$。

（1）前半区段

$$\tan\angle P_{20}C_fP_{21}=\tan(\angle P_{20}C_fO_1-\angle P_{21}C_fO_1)=(l_{20}/\tau_C-l_{21}/\tau_C)/[1+(l_{20}/\tau_C)(l_{21}/\tau_C)] \tag{20}$$

据式(20)和(14)，整理得

$$\tau_C^2-(l_{20}-l_{21})\tan[\alpha]\tau_C+l_{20}l_{21}=0 \tag{21}$$

判别式

$$\Delta_f(\theta_1)=(l_{20}-l_{21})^2\tan^2[\alpha]-4l_{20}l_{21} \tag{22}$$

是凸轮转角 θ_1的一元函数。$\Delta_f(\theta_1)$存在大于零、等于零和小于零 3 种可能性，与前述的优弧与 $O_{2P}z$ 相交、相切和相离对应。

式(21)有两解

$$\tau_{C1}=\{(l_{20}-l_{21})\tan[\alpha]+[(l_{20}-l_{21})^2\tan^2[\alpha]-4l_{20}l_{21}]^{1/2}\}/2 \tag{23}$$

$$\tau_{C2}=\{(l_{20}-l_{21})\tan[\alpha]-[(l_{20}-l_{21})^2\tan^2[\alpha]-4l_{20}l_{21}]^{1/2}\}/2 \tag{24}$$

将式(23)、(24)和(1)代入式(19)，搜索解得 $z_{C1\max f}=(s_{2P}-\tau_{C1})_{\max f}$和 $z_{C2\min f}=(s_{2P}-\tau_{C2})_{\min f}$。

（2）后半区段

$$\tan\angle P_{20}C_{1r}P_{21}=\tan(\angle P_{20}C_{1r}O_1+\angle P_{21}C_{1r}O_1)=(l_{20}/\tau_{C1}+l_{21}/\tau_{C1})/[1-(l_{20}/\tau_{C1})(l_{21}/\tau_{C1})] \tag{25}$$

据式(25)和(17)，整理得

$$\tau_{C1}^2-(l_{20}+l_{21})\tan[\alpha]\tau_{C1}-l_{20}l_{21}=0 \tag{26}$$

判别式

$$\Delta_r(\theta_1)=(l_{20}+l_{21})^2\tan^2[\alpha]+4l_{20}l_{21} \tag{27}$$

亦是 θ_1的一元函数。$\Delta_r(\theta_1)$仅存在大于零 1 种情况。

式(26)有两解，取 $\tau_{C1}>0$（舍 $\tau_{C1}<0$）者

$$\tau_{C1}=\{(l_{20}+l_{21})\tan[\alpha]+[(l_{20}+l_{21})^2\tan^2[\alpha]+4l_{20}l_{21}]^{1/2}\}/2 \tag{28}$$

同理，设 $\tau_{C2}=l_{O1C2}$，则

$$\tan\angle P_{20}C_{2r}P_{21}=\tan(\angle P_{20}C_{2r}O_1+\angle P_{21}C_{2r}O_1)=(l_{20}/\tau_{C2}+l_{21}/\tau_{C2})/[1-(l_{20}/\tau_{C2})(l_{21}/\tau_{C2})] \tag{29}$$

据式(29)和(18)，得

$$\tau_{C2}^2+(l_{20}+l_{21})\tan[\alpha]\tau_{C2}-l_{20}l_{21}=0 \tag{30}$$

判别式同式(27)。

同理,取 $\tau_{C2}>0$(舍 $\tau_{C2}<0$)者

$$\tau_{C2}=\{-(l_{20}+l_{21})\tan[\alpha]+[(l_{20}+l_{21})^2\tan^2[\alpha]+4l_{20}l_{21}]^{1/2}\}/2 \quad (31)$$

将式(28)、(31)和(1)代入式(19),搜索解得

$$z_{C1maxr}=(s_{2P}-\tau_{C1})_{maxr} \quad (32)$$

$$z_{C2minr}=(s_{2P}-\tau_{C2})_{minr} \quad (33)$$

进而,求解确定

$$z_{C1max}=\max\{z_{C1maxf},z_{C1maxr}\} \quad (34)$$

$$z_{C2min}=\min\{z_{C2minf},z_{C2minr}\} \quad (35)$$

于是,滚子中心 C 的容许选择区段——整程区间套为

$$z_C\in[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]} \quad (36)$$

对滚子中心 C、凸轮理论基圆半径 r_0 的存在性和存在性态,得到重要结论:

(1) 若存在

$$\Delta_f(\theta_1)<0 \quad (37)$$

成立的解 θ_1,则 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}=\Omega$(空集),满足 $\alpha\leqslant[\alpha]$ 条件的机构解不存在。

几何直观解释:前述的优弧和(或)劣弧,与浮动数轴 $O_{2P}z$ 相离即不交割。

(2) $\theta_1\in[0,\Phi_0]$,若恒有

$$\Delta_f(\theta_1)\geqslant 0 \quad (38)$$

几何直观解释:大于、等于分别表示前述的优弧和(或)劣弧,与浮动数轴 $O_{2P}z$ 相交、相切。

再加之

(2-1)若 $$z_{C1max}>z_{C2min} \quad (39)$$

则 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}=\Omega$(空集),满足 $\alpha\leqslant[\alpha]$ 条件的机构解不存在。

(2-2)若 $$z_{C1max}=z_{C2min} \quad (40)$$

则 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}=\Lambda$(独集),存在满足 $\alpha=[\alpha]$ 条件的机构解唯一。

(2-3)若 $$z_{C1max}<z_{C2min} \quad (41)$$

则 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}=\Gamma$(无穷集),存在满足 $\alpha=[\alpha]$ 条件的机构解两个,存在满足 $\alpha<[\alpha]$ 条件的机构解无数个。

满足式(41),且 $e=e_c$(某一定值),加得两点重要结论:

(2-3-1)如图3a所示,若 $[\alpha]_1>[\alpha]_2$,则

$$[z_{C1max},z_{C2min}]_{ec[\alpha]1}\cap[z_{C1max},z_{C2min}]_{ec[\alpha]2}=[z_{C1max},z_{C2min}]_{ec[\alpha]} \quad (42)$$

式(42)表明:随 $[\alpha]$ 减小,$[z_{C1max},z_{C2min}]_{ec[\alpha]}$ 不断收缩,$[\alpha]$ 值小者一定嵌套在 $[\alpha]$ 值大者的内部。

(2-3-2)如图3a所示,当 $[\alpha]$ 减至 $[\alpha]^*$ 时,恰 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{ec[\alpha]}$ 收缩、聚敛为一点 $C^*|_{ec}$,如下式所述;若取滚子中心

$$z_C^*|_{ec}=z_{C1max}^*|_{ec}=z_{C2min}^*|_{ec} \quad (43)$$

对应取得 $[\alpha]_{min}|_{ec}$ 或 $[\alpha]_{opt}|_{ec}$,即最小或最优压力角,此时

$$[\alpha]^*|_{ec}=[\alpha]_{min}|_{ec}=[\alpha]_{opt}|_{ec} \quad (44)$$

即:当 z_C 由 $z_{C1max}|_{ec}$ 渐增至 $z_C^*|_{ec}$ 时,压力角许用值由 $[\alpha]$ 单调减至 $[\alpha]^*$;当 z_C 由 $z_C^*|_{ec}$ 渐增至 $z_{C2min}|_{ec}$ 时,又由 $[\alpha]^*$ 单调增至 $[\alpha]$。

$C^*|_{ec}$ 的涵义:$e=e_c$(某一定值)时,对应的收缩、聚敛点。

据上可知,整程区间套 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 由左、右两端点 $C_{1[\alpha]}$、$C_{2[\alpha]}$ 封闭而成,内部存在一个脊点 $C^*|_{ec}$,如图3a所示。

显然,脊点 $C^*|_{ec}$ 将 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 一分为二——划分成由 $C_{1[\alpha]}$、$C^*|_{ec}$ 和 $C^*|_{ec}$、$C_{2[\alpha]}$ 为左、右端点的两子区间套 $[z_{C1max},z_C^*]_{[\alpha]}$ 和 $[z_C^*,z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 如图3a所示。

3.1.3 劣解区间套 $[z_{C1max},z_C^*]_{[\alpha]}$、非劣解区间套 $[z_C^*,z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 的求解

基圆半径 r_0、压力角 α 是衡量机构紧凑性、传动性能优劣的两个重要评价指标。

满足式(41)且 $e=e_c$(某一定值)时:

(1) $[z_{C1max},z_C^*]_{[\alpha]}$:始于 $C_{1[\alpha]}$,沿 $C_{1[\alpha]}\to C^*|_{ec}$ 选取 C,靠近 $C^*|_{ec}$ 者 r_0、α 皆占优;远离 $C^*|_{ec}$ 者 r_0、α 皆居劣。

(2) $[z_C^*,z_{C2min}]_{[\alpha]}$:始于 $C^*|_{ec}$,沿 $C^*|_{ec}\to C_{2[\alpha]}$ 选取 C,靠近 $C^*|_{ec}$ 者 r_0 居劣、α 占优,远离 $C^*|_{ec}$ 者 α 居劣、r_0 占优。

(3) $[z_{C1max},z_C^*]_{[\alpha]}$ 较 $[z_C^*,z_{C2min}]_{[\alpha]}$:同 $[\alpha]$ 条件下,前者 r_0 居劣,后者 r_0 占优。

于是,得到结论:$[z_{C1max},z_C^*]_{[\alpha]}$、$[z_C^*,z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 分别是整程区间套 $[z_{C1max},z_{C2min}]_{[\alpha]}$ 的劣解区间套和非劣解区间套,如图3a所示。

3.1.4 区间最优解 $r_{0min}|_{ec}$、$[\alpha]^*|_{ec}$ 的求解

满足式(40),凸轮唯一理论基圆半径

$$r_{0min}|_{ec}=r_{0max}|_{ec}=(s_{2P})_0-z_{C2min}=(s_{2P})_0-z_{C1max} \quad (45)$$

式中,$(s_{2P})_0$ 为推程起始位置 s_{2P} 值,据式(1)可得

$$(s_{2P})_0=[l_0^2+l_5^2+2l_0l_5\cos\theta_{50}-e^2]^{1/2} \quad (46)$$

满足式(41),凸轮最小、最大理论基圆半径

$$r_{0min}|_{ec}=(s_{2P})_0-z_{C2min} \quad (47)$$

$$r_{0max}|_{ec}=(s_{2P})_0-z_{C1max} \quad (48)$$

对应 $r_{0min}|_{ec}$、$r_{0max}|_{ec}$ 的滚子中心点,记为 $C_{2[\alpha]}|_{ec}$ 和 $C_{1[\alpha]}|_{ec}$,如图3a所示。

r_0 的许用取值范围 $r_0\in[r_{0min}|_{ec},r_{0max}|_{ec}]_{[\alpha]}$。

凸轮最优理论基圆半径

$$r_0^*|_{ec} = r_{0opt}|_{ec} = (s_{2P})_0 - z_C^* \tag{49}$$

此处所谓最优，指传动性能指标达到最优即$[\alpha] = [\alpha]^*|_{ec} = [\alpha]_{min}|_{ec} = [\alpha]_{opt}|_{ec}$。

综上可知，有

$$r_{0min}|_{ec} < r_0^*|_{ec} < r_{0max}|_{ec} \tag{50}$$

一般地，因回程取$[\alpha]_r = 70° \sim 80°$，推程整程区间套一般皆嵌套于回程的整程区间套中，故可免予考虑回程。

3.2　凸轮—逆时针转动

式(1)～(49)，虽由偏置式机构推得，亦适用于正置式机构，是偏置式/正置式机构的通用公式。

例如，$e = 0$、$\lambda = 0$ 时，本文式(1)、(3)和(6)～(9)即演变为文献[1]的式(1)～(6)。

4　二维前提框架下的第Ⅱ类机构综合问题

本节研究，是在非预定连杆导路方位线，即非预定偏距 e 的前提下进行的。

机构综合问题实质，是在非预定连杆导路方位线情况下求解整程区域套的问题。对应机构解域，是一个二维的平面区域，如图 3b 所示。

据上，故称二维前提框架下的第Ⅱ类机构综合问题，简称二维综合问题。

4.1　凸轮—顺时针转动

4.1.1　e 有解区间套的求解

e 是具有牵引功能的一个重要变量。其理论取值范围，分析如下：无论正($e > 0$)、负($e < 0$)偏置，据图 1 中$\triangle O_1O_{2P}O_2$的推程初始位置，有 $O_{2P}O_2 < O_{20}O_1$即$|e| < s_{20}$，即 $e \in (-s_{20}, s_{20})$即 $-90° < \lambda < 90°$。

实际上，e 取值未靠近$(-s_{20}, s_{20})$左、右两端点甚至相距较远时，满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$条件的机构解已不存在。

给定$[\alpha]$值，将对应机构有解之 e 的实际取值范围——有解区间套，记以 $e \in [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]}$。

对$[e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]}$的存在性/存在性态，得到如下结论：

(1) 若 $e \in [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]} = \Omega$(空集)，满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$条件的 e 不存在，如图 4a 所示。

(2) 若 $e \in [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]} = \Lambda$(独集)，满足 $\alpha = [\alpha]$条件的 e 存在且唯一，如图 4b 所示。

(3) 若 $e \in [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]} = \Gamma$(无穷集)，满足 $\alpha = [\alpha]$条件的 e 存在且无数个，如图 3b 和 4c～4e 所示。

结论(3)，具体又可细分为

$$e_{min} < e_{max} \leqslant 0 \tag{51}$$

$$\begin{cases} e_{max} > 0 \\ e_{min} < 0 \end{cases} \tag{52}$$

$$e_{max} > e_{min} \geqslant 0 \tag{53}$$

式(51)～(53)成立时，对应的$\{C\}_{[\alpha]}$形态分布，分别如图 4c～4e 所示。

4.1.2　机构解全域$\{C\}_{[\alpha]}$的求解确定

据结论(3)得到对应无数个 e 值、满足式(38)和(41)的无数个整程区间套$[z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]e \in [emin, emax][\alpha]}$简记以$[z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]e}$。

实质上，这是由无数个一维整程区间套构成的一个二维整程区域套。

机构解全域$\{C\}_{[\alpha]}$的新概念：满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$条件下，滚子中心 C 的解全域——集合$\{C\}_{[\alpha]e \in}$，简记为$\{C\}_{[\alpha]}$。$\{C\}_{[\alpha]}$即表述的二维整程区域套。

根据结论(3)得知：

(1) 如图 3b，若$[\alpha]_1 > [\alpha]_2$，有

$$[e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]1} \cap [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]2} = [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]2} \tag{54}$$

$$[z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]1e} \cap [z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]2e} = [z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]2e} \tag{55}$$

式(54)～(55)表明：随$[\alpha]$减小，有解区间套$[e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]}$和整程区域套$[z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]e}$不断地同步收缩，$[\alpha]$值小者一定嵌套在$[\alpha]$值大者的内部。

(2) 当$[\alpha]$逐渐减至$[\alpha]^{**}$时，$[e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]}$和$[z_{C1max}, z_{C2min}]_{[\alpha]e}$同时收缩、聚敛为同一点 $C^{**}|_{\{C\}}$，此时有

$$e^*|_{e\in} = e_{min}^*|_{e\in} = e_{max}^*|_{e\in} \tag{56}$$

$$z^*|_{e\in} = z_{C1max}^*|_{e\in} = z_{C2min}^*|_{e\in} \tag{57}$$

如图 3b 所示。

(3) 对应 $e \in [e_{min}, e_{max}]_{[\alpha]}$，据式(43)～(44)得无数个脊点 $C^*|_{ec}$，构成$\{C\}_{[\alpha]}$内部的一条脊线$\{C^*|_{e\in}\}$，如图 3b 所示。

沿$\{C^*|_{e\in}\}$，随 e 由 $e_{min[\alpha]}$渐增至 e^{**}时，由$[\alpha]$单调减至$[\alpha]^{**}$；由 e^{**}渐增至 $e_{max[\alpha]}$时，又由$[\alpha]^{**}$单调增至$[\alpha]$。

$[\alpha]^{**}$即为式(44)表述的无数个$[\alpha]^*|_{ec}$中最小者，即

$$[\alpha]^{**} = \min\{[\alpha]^*|_{e\in}\} \tag{58}$$

可以证明：前述的 $C^{**}|_{\{C\}}$点，即是 e^{**}、$[\alpha]^{**}$的对应出现点。

于是，称谓 $C^{**}|_{\{C\}}$点为脊底特征点。表述为

$$\begin{cases} e = e^{**} \\ z_C = z_C^{**} \\ r_0 = r_0^{**} \\ [\alpha] = [\alpha]^{**} \end{cases} \tag{59}$$

称 $C^{**}|_{\{C\}}$为脊底特征点，因该点$[\alpha]^*|_e$值最小宛如脊底，如图 3b 所示。

脊底特征点 $C^{**}|_{\{C\}}$ 的内涵——$\{C\}_{[\alpha]}$ 中具有全局最小(或最优)传动角的机构解。

$\{C\}_{[\alpha]}$ 的求解确定,可选取 e 为牵引变量,用一维搜索方法解决。

方便求解,对 e 采取等间距/离散化处理,得离散搜索求解方法。具体步骤:

(1) 取搜索步长

$$\Delta e = 10^{-k} \tag{60}$$

其中,$k = 1 \sim 3$(自然数),据精度要求而定。

(2) 取向上取整函数 $\mathrm{int}(-s_{20})$、向下取整函数 $\mathrm{int}(s_{20})$,作为 e 的搜索初值和终值。

(3) 从 $i = 1$ 开始,计算 e 的各离散值

$$e_i = \mathrm{int}(-s_{20}) + i\Delta e \quad (i = 1, 2, \cdots, i_{\max}) \tag{61}$$

得到 e 的离散序列 $\{e_i\}$。其中

$$i_{\max} = (\mathrm{int}(s_{20}) - \mathrm{int}(-s_{20}))/\Delta e \tag{62}$$

据式(59)~(60),对 e 的搜索已转换为对 i 的一维搜索。

(4) 依次取 $i = 1 \sim i_{\max}$,据第 2~3 节的求解公式,逐个(组)计算对应的 Δ_{12i}(含 Δ_{1i}、Δ_{2i})、$z_{\mathrm{C1max}i}$ 和 $z_{\mathrm{C2min}i}$ 的具体值。

(5) 据式(37)~(41),逐个判断各整程区间套存在性和存在性态,进而决定 i 存弃取舍。有解的 i 记为 i_y,存取;无解的 i 记为 i_n,弃舍。得有解序列 $\{i_y\}$;必有 i_y 的最小和最大值 $i_{y\min}$、$i_{y\max}$。

据 $\{i_y\}$ 和式(61)、(36)和 r_0 的许用范用,得到

$$\begin{cases} \{e_{iy}\} \\ \{[z_{\mathrm{C1max}iy}, z_{\mathrm{C2min}iy}]\} \\ \{[r_{0\mathrm{min}iy}, r_{0\mathrm{max}iy}]\} \end{cases} \quad (i \in \{i_y\}) \tag{63}$$

式(63)即是以离散形式表述、满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$ 条件的机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$。

为清晰表达 $\{C\}_{[\alpha]}$ 和 $\{C^*|_{e\in}\}$ 等,选取固定的标定基准——机构推程初始位置 $O_1O_{20}A$,将式(63)的序列整体、全貌性显呈于机构图中,得到 $\{C\}_{[\alpha]}$ 的几何直观即阴影区域,如图 3b 或图 4c~4e 所示。

据理论公式,开发出可快速、自动求解生成 $\{C\}_{[\alpha]}$ 的通用软件 CALRFCY。

4.1.3 劣解区域套 $\{C_{1[\alpha]}\}$、非劣解区域套 $\{C_{2[\alpha]}\}$ 的求解

整程区域套 $\{C\}_{[\alpha]}$ 由两条边界线 $\{C_{1[\alpha]}\}$、$\{C_{2[\alpha]}\}$ 闭合而成,内部还有一条脊线 $\{C^*|_{e\in}\}$,如图 3b、4d 和 4e 所示。

$\{C^*\}_{e\in}$ 将 $\{C\}_{[\alpha]}$ 划分为由 $\{C_{1[\alpha]}\}$、$\{C^*|_{e\in}\}$ 和 $\{C^*|_{e\in}\}$、$\{C_{2[\alpha]}\}$ 作为边界线的两部分——两整程子区域套 $\{C\}_{1[\alpha]}$ 和 $\{C\}_{2[\alpha]}$。

显而易见,对所有 e 值(任意 $e = e_c$):

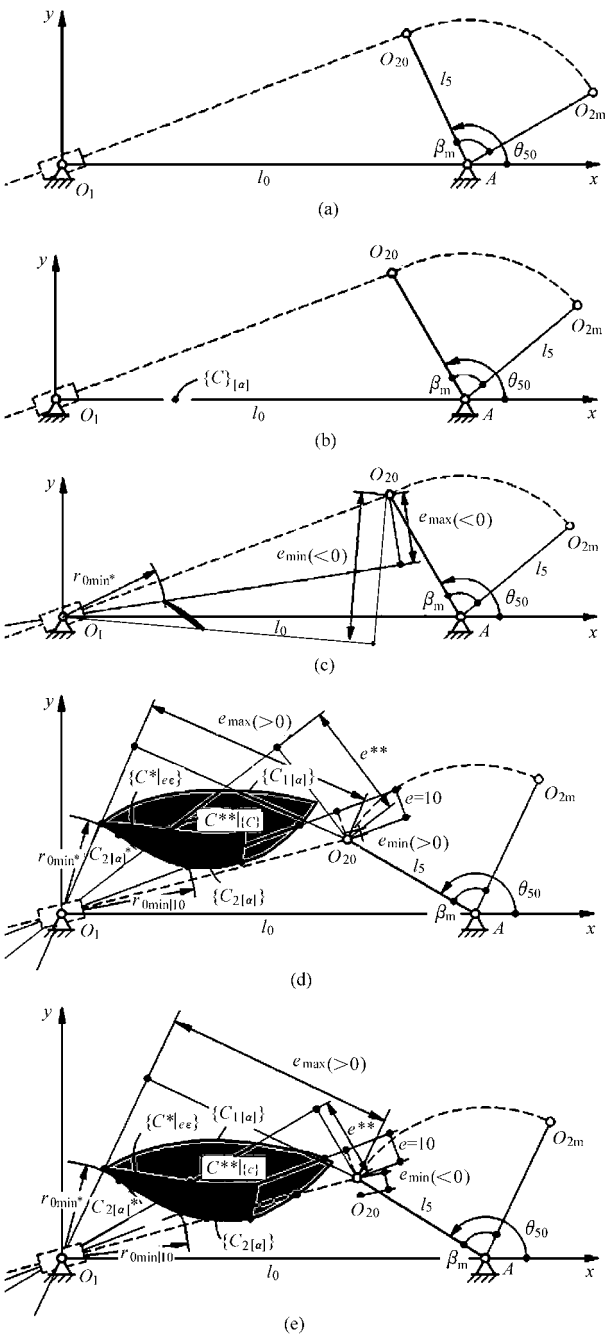

图 4 “整程区域套”的存在性与存在性态

Fig. 4 Existence and existing form of whole nested region

($l_0 = 140$ mm, $l_5 = 50$ mm, $\beta_m = 80°$, $\Phi_0 = 150°$, $[\alpha] = 40°$)

(a) $[e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = \Omega$(空集), $\theta_{50} = 115°$

(b) $[e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = \Lambda$(独集), $\theta_{50} = 119.22°$

(c) $[e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = \Gamma$(无穷集), $\theta_{50} = 120°$

(d) $[e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = \Gamma$(无穷集), $\theta_{50} = 150°$(数据源于例 1)

(e) $[e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = \Gamma$(无穷集), $\theta_{50} = 148°$(数据源于例 2)

(1) $\{C\}_{1[\alpha]}$:始于 $\{C\}_{1[\alpha]}$,沿 $\{C\}_{1[\alpha]} \rightarrow \{C^*|_{e\in}\}$ 选取 C,靠近 $\{C^*|_{e\in}\}$ 者 r_0、α 皆占优,远离 $\{C^*|_{e\in}\}$ 者 r_0、α 皆居劣。

(2) $\{C\}_{2[\alpha]}$:始于 $\{C^*|_{e\in}\}$,沿 $\{C^*|_{e\in}\} \rightarrow \{C\}_{2[\alpha]}$ 选取 C,靠近 $\{C^*|_{e\in}\}$ 者 r_0 居劣、α 占优,远离 $\{C^*|_{e\in}\}$ 者 α 居劣、r_0 占优。

（3）$\{C\}_{1[\alpha]}$ 较 $\{C\}_{2[\alpha]}$：同 $[\alpha]$ 条件下，前者 r_0 居劣，后者 r_0 占优。

据多目标优化理论[20~21]，得到结论：$\{C\}_{1[\alpha]}$ 和 $\{C\}_{2[\alpha]}$ 分别为 $\{C\}_{[\alpha]}$ 中的劣解区域套和非劣解区域套。故图 3b、4d 和 4e 中，$\{C\}_{2[\alpha]}$、$\{C\}_{1[\alpha]}$ 分别用深色阴影、浅色阴影区域标示。显见，劣解区域套 $\{C\}_{1[\alpha]}$ 理论上即已无优势；实际综合时，仅需考虑非劣解区域套 $\{C\}_{2[\alpha]}$。

4.1.4　全域最优解 $C^*|_{\{C\}}$、$C^{**}|_{\{C\}}$ 的求解

（1）全域最优解 $C^*|_{\{C\}}$ 的求解确定

全域最优解 $C^*|_{\{C\}}$，系指 $\{C\}_{[\alpha]}$ 中对应取得 $r_{0\min}$ 最小值即 $(r_{0\min})_{\min}$ 的那组机构解。

几何直观解释：分别以 O_1、$r^*_{0\min}$ 为圆心和半径划弧，得到的与边界线 $\{C\}_{2[\alpha]}$ 的切点 $C^*_{2[\alpha]*}$，如图 4d 和 4e 所示。

据式（63），比较 $\{[r_{0\min iy}, r_{0\max iy}]\}$ 中所有 $r_{0\min iy}$ 值，筛得最小者

$$r^*_{0\min} = (r_{0\min iy})_{\min} = \min\{r_{0\min iy}\} \tag{64}$$

记与 $r^*_{0\min}$ 对应的 $r_{0\min iy} = r_{0\min py}$，即 $i_y = p$。

于是，全域最优解 $C^*|_{\{C\}}$

$$\begin{cases} e^* = e_{py} \\ z^*_{C2\min} = z_{C2\min py} \\ r^*_{0\min} = r_{0\min py} \end{cases} \tag{65}$$

（2）全域最优解 $C^{**}|_{\{C\}}$ 的求解

全域最优解 $C^{**}|_{\{C\}}$，系指 $\{C\}_{[\alpha]}$ 中满足式（56）~（58）表述的那组机构解。

根据 $\{i_y\}$，据式（44）、（43）和（50）得到

$$\begin{cases} \{e_{iy}\} \\ \{[\alpha]_{\min iy}\} = \{[\alpha]^*_{iy}\} \\ \{z^*_{Ciy}\} \\ \{r^*_{0iy}\} \end{cases} \quad (i \in \{i_y\}) \tag{66}$$

据式（66），比较 $\{[\alpha]_{\min iy}\}$ 中所有 $[\alpha]_{\min iy}$ 值，筛得最小者

$$[\alpha]^{**} = ([\alpha]_{\min iy})_{\min} = \min\{[\alpha]_{\min iy}\} \tag{67}$$

记与 $[\alpha]^{**}$ 对应的 $[\alpha]_{\min iy} = [\alpha]_{\min qy}$，即 $i_y = q$。

于是，全域最优解 $C^{**}|_{\{C\}}$

$$\begin{cases} e^{**} = e_{qy} \\ z^{**}_C = z^*_{Cqy} \\ r^{**}_0 = r^*_{0qy} \\ [\alpha]^{**} = [\alpha]_{\min qy} \end{cases} \tag{68}$$

4.2　凸轮—逆时针转动

综合第 3 节、第 4 节研究，不难发现：一维综合问题的最优解是狭义的、一维的和局部性的，而二维综合问题的最优解则是广义的、二维的和全局性的。例如，第 3 节中的 $C_{2[\alpha]}|_{ec}$ 和 $C^*|_{ec}$，较之第 4 节中的 $C^*|_{\{C\}}$ 和 $C^{**}|_{\{C\}}$。

5　机构综合示例

本文提出和研究偏置式机构的意义在于：①跳脱正置式机构的局限[1]，显著拓展了对象机构范围。②实现正置式一维综合→偏置式一维综合→二维综合的提升。③相同前提下，偏置较正置机构，具有显著的优越性。

特别是第③点所述的显著优越性，下面将结合两个机构综合示例，给出具体的论证说明。

例 1　已知 $\theta_{50} = 150°$，$l_0 = 140$ mm，$l_5 = 50$ mm，$\beta_m = 80°$，$\Phi_0 = 150°$，$[\alpha] = 40°$，摇杆推程摆线运动规律，凸轮顺时针转动，试回答：

（1）$e = 0$（正置式）时，求解机构的 $r_{0\min}|_0$。

（2）$e = 10$ mm（偏置式）时，求机构的 $r_{0\min}|_{10}$，比较和讨论（1）和（2）的求解结果。

（3）机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$，并讨论之。

解：

（1）正置式机构一维综合问题。$e = 0$ mm：据本文理论公式，解得满足 $\Delta_f(\theta_1) < 0$ 成立的解 $\theta_1 \in [38.617\,4°, 50.993\,2°]$，归属式（37）成立情形，机构解不存在。

如图 4d 所示，O_1O_{20} 方位线与机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$——阴影区域没有交集。

（2）偏置式机构一维综合问题。$e = 10$ mm：据 $\theta_{50} = 150°$、$l_0 = 140$ mm、$l_5 = 50$ mm、$e = 10$ mm 和式（13），得 $\beta^* = 34.623\,1°$。一维搜索解得 $\theta_1^* = 69.937\,1°$。据式（19）一维搜索，再据式（34）和（35）比较筛选，计算得到 $z_{C1\max} = 18.760\,9$ mm 和 $z_{C2\min} = 50.329\,4$ mm。再据式（46）、（47）分别算得 $(s_{2P})_0 = 99.376\,3$ mm、$r_{0\min}|_{10} = 49.046\,9$ mm。

如图 4d 所示，O_1O_{2P} 方位线通过机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$，且与边界线交于 $C_{1[\alpha]}|_{10}$、$C_{2[\alpha]}|_{10}$ 两点。

比较（1）、（2）的求解结果：正置式机构无解；正偏置机构有解。综上可得：同前提条件下，偏置式较正置式机构，具有的显著优越性。

（3）偏置/正置式机构二维综合问题。取 $k = 2$，据式（57）和（1），分别计算得到 $\Delta e = 0.01$ mm、$s_{20} = 99.878\,1$ mm、$\mathrm{int}(-s_{20}) = -99$ 和 $\mathrm{int}(s_{20}) = 99$。据式（61）~（63）解出所有的 e_{iy}、$[z_{C1\max}, z_{C2\min}]_{iy}$ 和 $[r_{0\min}, r_{0\max}]_{iy}$，计算所有的 e_{iy}、$(s_{2P})_{0iy}$、$z_{C1\max iy}$、$z_{C2\min iy}$ 和 $r_{0\min iy}$、$r_{0\max iy}$ 数值并列表，详见表 1。

机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$，可以离散数据序列的表 1 描述。其中，$i = 10\,268 \sim 18\,031$ 为有解区域，$i = 1 \sim 10\,267 \cup 18\,032 \sim 19\,800\,(= i_{\max})$ 为无解区域。详见

表 1 部分具有代表性的计算结果

Tab. 1 Some of representative calculation results

mm

序号 i	偏距 e_{iy}	$z_{C1maxiy}$	$z_{C2miniy}$	r_{0miniy}	r_{0maxiy}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10 268	3.670 0	37.042 2	38.091 5	61.719 2	62.768 5
10 269	3.680 0	36.762 9	38.363 2	61.447 1	63.047 6
10 270	3.69	36.556 0	38.561 5	61.248 5	63.254 0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16 558	66.570 0	23.055 2	40.939 0	35.260 5	53.144 2
16 559	66.580 0	23.055 9	40.930 6	35.260 4	53.135 1
16 560	66.590 0	23.056 5	40.922 2	35.260 2	53.126 0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18 031	81.300 0	21.913 4	21.919 4	36.097 4	36.103 4
18 032	81.310 0	21.911 4	21.904 2	36.098 7	36.091 4
18 033	81.320 0	21.909 4	21.888 9	36.100 0	36.079 4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

CALRFCY 自动生成的图 4d 所示。

为简短篇幅，表 1 中仅列出部分有代表性的离散数据序列。

引据表 1，得到：当 $e \in [e_{\min}, e_{\max}]_{[\alpha]} = [3.670\,0, 81.300\,0]$ 时，对应的正偏置机构满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$ 的条件。而当 $e \in (-99, 3.670\,0) \cup (81.310\,0, 99)$ 时，对应的负偏置、正偏置和正置式机构，皆不满足 $\alpha \leqslant [\alpha]$ 的条件。

比较（1）、（3）的求解结果，可从机构解全域 $\{C\}_{[\alpha]}$ 层面和高度，得到同样结论：相同前提条件下，偏置式较正置式机构，具有显著的优越性。

值得强调指出：偏置包括方向（正负）和大小两方面，皆需正确选取，否则会适得其反。

例 2 前提已知条件，除 $\theta_{50} = 148°$ 外，l_0、l_5、θ_{50}、Φ_0、$[\alpha]$、凸轮转向和推程运动规律等皆与例 1 相同。

（1）$e = 0$ mm 时，求解 $r_{0\min}|_0$，$[\alpha]^*|_0$，$r_0^*|_0$。

（2）$e = 10$ mm 时，求解 $r_{0\min}|_{10}$，$[\alpha]^*|_{10}$，$r_0^*|_{10}$。比较讨论（1）和（2）的求解结果。

（3）求解全域最优解 $C^*|_{\{C\}}$、$C^{**}|_{\{C\}}$；比较讨论（1）和（3）的求解结果。

解：

（1）正置式机构一维综合问题。$e = 0$ mm：引据正文公式，通过一维搜索解得 $r_{0\min}|_0$、$[\alpha]^*|_0$ 和 $r_0^*|_0$ 值，见表 2 且如图 4e 所示。

（2）偏置式机构的一维综合问题。$e = 10$ mm（>0）：一维搜索解得 $r_{0\min}|_{10}$、$[\alpha]^*|_{10}$ 和 $r_0^*|_{10}$ 值，见表 2 且如图 4e 所示。

比较讨论（1）和（2）的求解结果：

① $C^*|_0$ 与 $C^*|_{10}$ 比较

$r_{0\min}|_0 = 55.863\,6$，$r_{0\min}|_{10} = 45.840\,2$。后者是前者的 82.06%，尺寸缩小 17.94%。

② $C^{**}|_0$ 与 $C^{**}|_{10}$ 比较

$[\alpha]^*|_0 = 39.509\,8°$，$[\alpha]^*|_{10} = 36.684\,3°$。后者较前者降低 2.825 5°，性能提高 7.15%。

表 2 具有代表性的计算结果

Tab. 2 Representative calculation results

条件	e，(e^*, e^{**}) /mm	$r_{0\min}$ /mm	$[\alpha]^*$（$[\alpha]^{**}$）/(°)	r_0^*（r_0^{**}）/mm
正置	0	55.863 6	39.509 8	64.469 8
偏置	10.000 0	45.840 2	36.684 3	68.076 2
$C^*|_{\{C\}}$	65.240 0	34.854 1		
$C^{**}|_{\{C\}}$	26.530 0		34.346 6	54.653 4

（3）偏置/正置式机构的二维综合问题。取 $k = 2$，$\Delta e = 0.01$ mm、$s_{20} = 101.130\,2$ mm、$\mathrm{int}(-s_{20}) = -101$ 和 $\mathrm{int}(s_{20}) = 101$。

（3a）$C^*|_{\{C\}}$：引据式（63）比较序列 $\{[r_{0miniy}, r_{0maxiy}]\}$ 筛得 $r_{0\min}^*$、e^*，详见表 2。

（3b）$C^{**}|_{\{C\}}$：引据 $\{i_y\}$ 和式（63），比较序列 $\{[\alpha]_{miniy}\}$ 得 $[\alpha]^{**}$、r_0^{**} 和 e^{**}，详见表 2。

比较讨论（1）和（3）的求解结果：

① $C^*|_0$ 与 $C^*|_{\{C\}}$ 比较

$r_{0\min}|_0 = 55.863\,6$ mm，$r_{0\min}|_{\{e\}|[\alpha]} = 34.854\,1$ mm。后者是前者 62.39%，尺寸缩小 37.61%。

② $C^{**}|_0$ 与 $C^{**}|_{\{C\}}$ 比较

$[\alpha]^*|_0 = 39.509\,8°$，$[\alpha]^{**} = 34.346\,6°$。后者较前者降低 5.163 2°，性能提高 13.07%。

综上所述，无论是（1）和（2）的对比，还是（1）和（3）的对比，皆可得到重要结论：相同前提条件下，偏置式较正置式机构，具有显著优越性。

与例 1 同理，欲得到优异的机构解，也需正确选取偏置的方向和大小。

6 结论

（1）提出狭义、广义第Ⅱ类机构综合问题的概念，丰富了第Ⅱ类机构综合问题的内涵和外延。

（2）将第Ⅱ类机构综合问题，由正置式机构一维综合问题，上升为偏置式机构一维综合问题和二维综合问题，显著拓展、延伸了问题的解空间和优解空间。

（3）通过引入浮动数轴、判别式 $\Delta_r(\theta_1)$、$\Delta_f(\theta_1)$ 和非劣解区间套等概念，发展完善了一维综合问题的求解理论方法。

（4）通过引入整程区域套和非劣解区域套等概念，系统提出了一维、二维综合问题的求解理论方法。

（5）相同前提条件下，偏置式较正置式机构，具有显著优越性。

（6）提出的一整套机构综合的思路、方法和步骤，对研究解决广义第Ⅱ类机构综合问题具有一定指导意义。

参 考 文 献

1 常勇，杨富富．作平面运动滚子从动件盘形凸轮机构的第Ⅱ类机构综合问题[J]．机械工程学报，2010，46(21)：35～41.
Chang Yong, Yang Fufu. Second mechanism synthesis task of disc cam mechanisms with roller follower moving in planar general motion[J]. Journal of Mechanical Engineering,2010, 46(21):35～41. (in Chinese)

2 常勇，杨富富．作平面运动滚子从动件形锁合凸轮机构的第Ⅱ类机构综合问题[J]．机械工程学报，2012，48(1)：39～46.
Chang Yong, Yang Fufu. Second mechanisms synthesis task of positive-drive disc cam mechanisms with roller follower moving in general planar motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(1): 39～46. (in Chinese)

3 常勇，杨富富．作平面运动滚子从动件盘形凸轮机构的广义第Ⅱ类机构综合问题[J]．机械工程学报，2012，48(15)：47～57.
Chang Yong, Yang Fufu. Research on second mechanisms synthesis task of positive-drivedisc cam mechanisms with roller follower moving in general planar motion[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(15): 47～57. (in Chinese)

4 常勇，李延平，刘国祥．按许用压力角设计最小尺寸作平面复杂运动滚子从动件平面凸轮机构的解析法[J]．机械工程学报，1991，27(4)：37～41.
Chang Yong, Li Yanping, Liu Guoxiang. The analytics for designing minimum size disc cam mechanisms whose roller follower moving in general planar motion according to allowable pressure angle[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,1991, 27(4):37～41. (in Chinese)

5 Schoenherr J. Synthesis of planar cam mechanics with lowest dimensions[J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28(3): 317～325.

6 Navarro O, Wu C J, Angeles J. Size-minimization of planar cam mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(3): 371～386.

7 华大年．按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮机构的解析法[J]．机械工程学报，1982，18(4)：74～79.
Hua Danian. The analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,1982,18(4):74～79. (in Chinese)

8 常勇，吴从炘，李延平．关于《按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮机构的解析法》一文的两点注记[J]．黑龙江商学院学报：自然科学版，1989，5(2)：49～54.
Chang Yong, Wu Congxin, Li Yanping. Two notes on "the analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle"[J]. Journal of Heilongjiang Commercial College,1989,5(2):49～54. (in Chinese)

9 常勇，吴从炘，李延平．关于《按许用压力角设计最小尺寸的摆动从动杆平面凸轮机构的解析法》一文的再注记[J]．黑龙江商学院学报：自然科学版，1990，6(4)：15～19.
Chang Yong, Wu Congxin, Li Yanping. The further notes on "the analytics for designing minimum size disc cam mechanisms with oscillating follower according to allowable pressure angle"[J]. Journal of Heilongjiang Commercial College,1990,6(4):15～19. (in Chinese)

10 王知行，李瑰贤．关于直动滚子从动件盘形凸轮基本尺寸的讨论[J]．机械工程学报，1986，22(4)：88～93.
Wang Zhixing, Li Guixian. Discussion on fundamental size of translating follower disc cam mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,1986,22(4):88～93. (in Chinese)

11 常勇．作平面复杂运动滚子从动件平面凸轮廓线设计[J]．机械设计，1996，13(9)：15～16，37.
Chang Yong. The disc cam outline design whose roller follower moving in general planar motion[J]. Machine Design,1996, 13(9):15～16, 37. (in Chinese)

12 常勇，刘国祥．构造平面与空间凸轮机构类速度图的一种通用方法[J]．机械设计，1995，12(2)：4～7.
Chang Yong, Liu Guoxiang. A general and effective method for constructing the analogous-velocity charts of planar and special cam mechanisms[J]. Machine Design,1995,12(2): 4～7. (in Chinese)

13 Dasgupta Anirvan, Ghosh Amitabha. On the determination of Basic dimensions of a cam with a translating roller-follower[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126(1): 143～147.

14 Carra S, Garziera R, Pellegrini M. Synthesis of cams with negative radius follower and evaluation of the pressure angle[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39: 1 017～1 032.

15 Ji Z, Manna Y A. Size minimization of disc cams with roller-followers under pressure angle constraint[J]. Proc. IMech E., Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2008, 222(12): 2 475～2 484.

16 Hamilton H Mable, Charles F Reinholtz. Mechanisms and dynamics of machinery[M]. New York: John Wiley & Sons, 1986.

17 Shigley Joseph Edward, Uieker John Joseph. Theory of machines and mechanisms [M]. Seattle: Jr. McGraw-Hill Book Company, 1980.

18 伏尔默 J. 凸轮机构[M]．郭连声，柴邦衡，译．北京：机械工业出版社，1983.

（下转第 267 页）

hydraulic pump[J]. Chinese Mechanical Engineering, 2011, 22(14):1 668 ~ 1 671. (in Chinese)

3 胡仁喜,苑士华,刘红宁,等. 高压高速条件下柱塞副泄漏流场分析[J]. 农业机械学报,2009,40(4):221 ~ 226.
Hu Renxi, Yuan Shihua, Liu Hongning, et al. Analysis on the leaking flow field of the piston sector considering the high press and high velocity[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(4): 221 ~ 226. (in Chinese)

4 杨华勇,周华. 纯水液压传动技术的若干关键问题[J]. 机械工程学报,2002,38(增刊):96 ~ 100.
Yang Huayong, Zhou Hua. Some key problems of the water hydraulics[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(Supp.):96 ~ 100. (in Chinese)

5 Wang X, Yamaguchi A. Characteristics of hydrostatic bearing/seal parts for water hydraulic pumps and motors. Part 1: experiment and theory[J]. Tribology International, 2002,35(7):425 ~ 433.

6 Yui Akinori, Okuyama Shigeki, Kitajima Takayuki. Study on precision machine table equipped with constant-flow hydrostatic water bearings[J]. Advanced Materials Research, 2009,76 ~ 78:664 ~ 669.

7 Conrad F. Trends in design of water hydraulics-motion control and open-ended solutions[C] // Proceedings of the 6th JFPS International Symposium on Fluid Power, 2005: 420 ~ 431.

8 翟江,赵勇刚,周华. 水压轴向柱塞泵内部空化流动数值模拟[J]. 农业机械学报,2012,43(11):244 ~ 249.
Zhai Jiang, Zhao Yonggang, Zhou Hua. Numerical of cavitating flow in water hydraulic axial piston pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012,43(11): 244 ~ 249. (in Chinese)

9 燕山大学. 径向活塞滚球式端面配流低速大扭矩水压马达:中国, 201110379726.7 [P]. 2012 - 05 - 02.

10 陈燕生. 液体静压支承原理和设计[M]. 北京:国防工业出版社,1980.

11 许耀铭. 油膜理论与液压泵和马达的摩擦副设计[M]. 北京:机械工业出版社,1984.

(上接第 245 页)

10 Souad Latorre, Jean-Marc Pointet. The contributions and consequences of simulation tools and digital mock-ups on design and production as applied to the automobile and aeronautics industries[J]. International Journal of Automotive Technology and Management, 2008, 8(3): 350 ~ 368.

11 Charles Snyder, Chetan S Sankar. Use of information technologies in the process of building the Boeing 777[J]. Journal of Information Technology Management, 1998, IX(3 ~ 4): 31 ~ 42.

12 李盘林,李宝洁,孟定. 离散数学[M]. 北京:人民邮电出版社,2002.

13 Fei Gao, Gang Xiao, Jiujun Chen. Product interface reengineering using fuzzy clustering[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(4): 439 ~ 446.

14 张质文,虞和谦. 起重机设计手册[M]. 北京:中国铁道出版社,2001.

(上接第 261 页)

19 王知行, 邓宗全. 机械原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

20 魏权龄, 王日爽. 数学规划与优化设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.

21 李新兰, 姜潮, 韩旭. 基于区间的不确定多目标优化方法及应用[J]. 中国机械工程, 2011, 22 (9): 1 100 ~ 1 106.
Li Xinlan, Jiang Chao, Han Xu. An uncertainty multi-objective optimization based on interval analysis and its application[J]. China Mechanical Engineering,2011, 22(9):1 100 ~ 1 106. (in Chinese)

22 李方义, 李光耀, 郑刚. 基于区间的不确定多目标优化方法研究[J]. 固体力学学报, 2010, 31(1): 86 ~ 93.
Li Fangyi, Li Guangyao, Zheng Gang. Uncertain multi-objective optimization method based on interval[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, 31(1): 86 ~ 93. (in Chinese)

23 赵匀, 赵雄, 张玮炜, 等. 水稻插秧机现代设计理论与方法[J]. 农业机械学报, 2011,42(3):65 ~ 68.
Zhao Yun, Zhao Xiong, Zhang Weiwei, et al. Modern design theory and method of rice transplanter[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2011,42(3): 65 ~ 68. (in Chinese)