doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.04.043

模块化六自由度机械臂逆运动学解算与验证

李宪华'郭永存'张军'郭帅2

(1. 安徽理工大学机械工程学院,淮南 232001; 2. 上海大学 CIMS& 机器人中心,上海 200444)

摘要:针对六自由度模块化串联机械臂,进行了正运动学求解,并提出了该种臂型的运动学逆解计算方法。从机械 臂的结构特点出发,采用 DH 法进行结构建模,得到了正运动学模型。在逆运动学求解过程中,针对纯代数法找不 到该种臂型的独立不相关变量方程的问题,采用几何方法求解机械臂前3个关节、后3个关节使用反变换法求解, 通过给出解的组合原则,得到了该机械臂逆运动学的完整解析解。为满足机器人系统编程和实际控制需要,基于 VC++编制了 MFC 的运动学算法程序,验证了正逆运动学求解的正确性,为机械臂精确定位和运动规划提供了必 要的前提条件。

关键词:模块化机械臂 正逆运动学 组合原则 逆解树 中图分类号:TP241 文献标识码:A 文章编号:1000-1298(2013)04-0246-06

Inverse Kinematics Solution and Verification of Modular 6-DOF Manipulator

Li Xianhua¹ Guo Yongcun¹ Zhang Jun¹ Guo Shuai²

School of Mechanical Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China
 CIMS & Robot Center, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: Aimed at 6-DOF modular serial manipulator, forward kinematics was established and an inverse kinematics calculation method was proposed. To the structural characteristics of the manipulator, a forward kinematics model was conducted by using the DH method to describe the workspace. In the process of solving inverse kinematics, because the independent irrelevant variable equation can not be found by the pure algebra method, the geometry method was employed to solving the inverse kinematics of the first three joints, and the last three joints were solved by using algebra method. The complete analytical solution of the inverse kinematics was acquired by giving the combination principle of solutions. In order to meet the need of programming and actual control of robot system, the correctness of forward and inverse kinematics was validated by software developed based on MFC of VC + +.

Key words: Modular manipulator Forward and inverse kinematics Combination principle Tree of inverse kinematics solutions

引言

运动学是机器人学研究的基础课题,包括正运 动学和逆运动学,而逆运动学求解是机器人实时控 制程序中必需的,一直受到机器人领域专家和学者 的密切关注,对逆运动学的研究热点主要集中于解 的存在性与逆解算法上。 运动学逆解的复杂程度直接与机械臂的结构有 很大关系,许多学者对六自由度串联机械臂的逆运 动学研究做出了很大的贡献^[1-9]。在求解机械臂逆 运动学的问题中,解析法虽然可以找到全部根,但计 算复杂;几何法求解针对某些特殊的结构进行简化, 虽然对于一般机械臂不通用,但是其形式简单;而迭 代法大多数情况下是可行的,但却无法得到全部解,

*国家高技术研究发展计划(863 计划)资助项目(2007AA041604)和安徽省博士后基金资助项目(DG081) 作者简介:李宪华,讲师,博士,主要从事机器人技术研究,E-mail:xhli01@163.com 通讯作者:郭永存,教授,博士生导师,主要从事矿山机械及自动化研究,E-mail;ycguo@aust.edu.cn

收稿日期: 2012-10-16 修回日期: 2012-11-06

且存在迭代不收敛的危险^[10];人工神经网络^[11]、遗 传算法^[12-13]和 Groebner 基法^[14]虽然在理论上进行 了可行性的研究,但是存在实时性、解的精度和稳定 性问题,与机械臂实时控制要求相悖,很少用于机械 臂的实际控制之中。

本文在分析模块化六自由度机械臂构型的基础 上,首先采用 DH 法对机械臂进行结构参数建模,建 立正运动学模型;对于机械臂的逆运动学求解问题, 从实时控制和解的稳定性出发,根据机械臂的构型 特点,结合几何法与解析法的优点,前3个关节角采 用几何法求解,后3个关节角采用反变换法求解;为 了进行机械臂运动控制和与多传感器集成,编制基 于 VC + +6.0 的机械臂运动学算法验证程序,并结 合 Matlab 机器人工具箱,验证机械臂正运动学模型 及逆运动学求解的正确性。

1 正运动学分析

机械臂正运动学求解是已知机械臂各关节角度,求取机械臂末端执行器在基础坐标系下的期望 位姿,一般采用 DH 法进行结构建模,基本思想是: 在机械臂各个关节处建立参考坐标系,而后确定出 任意 2 个相邻坐标系间的关系,最后得出由机械臂 末端执行器至基座的总变换矩阵。

1.1 结构参数建模

机械 臂关节采用德国 Amtec 公司生产的 PowerCube 可重构机器人模块构成,该模块不仅具 备机械系统的可重构性,而且每个控制系统亦可单 独工作,而关节间的连接件,则由课题组设计和加工 制作。图 1 为机械臂构成,图 2 为机械臂坐标系, 表 1 为机械臂 DH 参数。



图 1 模块化机械臂构建





图 2 机械臂坐标系

Fig. 2 Coordinate system of manipulator

表1 机械臂 DH 参数

Tab.1 DH parameters of manipulator

关节	θ_i	$\alpha_i/(\circ)$	a_i	d_i	关节范围/(°)
1	θ_1	- 90	0	0	$-180\sim 180$
2	θ_2	90	0	d_2	$-180\sim 180$
3	θ_3	- 90	0	0	$-120 \sim 120$
4	$ heta_4$	90	0	d_4	$-180\sim 180$
5	θ_5	- 90	0	0	$-120 \sim 120$
6	θ_{6}	0	0	d_6	$-180\sim 180$

1.2 正运动学解算

根据相邻杆件坐标系间的齐次变换矩阵,求出 机械臂末端相对于坐标系原点的变换矩阵,正运动 学公式表示为

$${}^{0}\boldsymbol{T}_{6}(\theta) = \prod_{i=1}^{6} \left({}^{i-1}\boldsymbol{T}_{i}(\theta_{i}) \right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x} & o_{x} & a_{x} & p_{x} \\ n_{y} & o_{y} & a_{y} & p_{y} \\ n_{z} & o_{z} & a_{z} & p_{z} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$
(1)

(4)

采用欧拉角表示手臂姿态,至此给定一组关节 角度(θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , θ_5 , θ_6),可以确定机械臂的位置 和姿态(p_x , p_y , p_z , φ , θ , ψ)。

2 逆运动学解算

逆运动学求解是根据机械臂末端执行器的 期望位姿,求出与该位形相对应的各关节输出角 度。该机械臂最后3个关节轴线相互垂直,交于 一点,满足 Pieper 准则^[15],因此存在封闭解。由 于该种手臂构型的特殊性,采用代数法根本无法 找到一组独立不相关的变量,所以采用几何法对 前3个关节角进行求取,然后进行变量分离,便 可找到独立不相关变量,因此后3个关节角采用 代数法求取。

2.1 求解 θ_1 、 θ_2 和 θ_3

给定机械臂末端执行器一组位姿 $(p_x, p_y, p_z, \varphi, \theta, \psi)$,求取坐标转移矩矩阵后确定手腕位置 (x_w, y_w, z_w) 有

$$\begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} = \boldsymbol{p} - d_6 \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} p_x - d_6 a_x \\ p_y - d_6 a_y \\ p_z - d_6 a_z \end{bmatrix}$$
(2)

由于构型原因,该机械臂的肘关节只能在平面 $x_0y_0z_0$ 内运动。腕部位置设为 W,肘部位置设为 E, A 为腕部在到 x_0y_0 平面内的投影, B 为 W 在直线 BE 上投影,如图 3 所示。







从图 3 得到 $\theta_1 = \angle y_0 O_0 B$, $\theta_2 = \angle WBA$, $\theta_3 = \pi - \angle WEB$, 同样有 $l_{o_0E} = d_2$, $l_{WE} = d_4$ 。 设 E 点坐标 (x_e, y_e, z_e), A 点坐标(x_a, y_a, z_a), B 点坐标(x_b, y_b , z_b), 在 $\triangle O_0 EW$ 中有

$$\begin{cases} (x_w - x_e)^2 + (y_w - y_e)^2 + (z_w - z_e)^2 = d_4^2 \\ x_e^2 + y_e^2 + z_e^2 = d_2^2 \\ z_e \equiv 0 \end{cases}$$
(3)

求解式(3)得到 E 点二组解,设为(x_e, y_e, z_e)和 (x'_e, y'_e, z'_e),即为到定点 O_0 定长为 d_2 的圆与到定点 A 定长为 l_{AE} 的圆的交点,分别记为 E 和 E',如图 4 所示。



图 4 肘部位置 Fig. 4 Elbow position

$$\begin{cases} x_e = \frac{2kx_w + \sqrt{(-2kx_w)^2 - 4(x_w^2 + y_w^2)(k^2 - d_{2}^2y_w^2)}}{2(x_w^2 + y_w^2)} \\ y_e = \frac{k - x_w [2kx_w + \sqrt{(-2kx_w)^2 - 4(x_w^2 + y_w^2)(k^2 - d_{2}^2y_w^2)}] / [2(x_w^2 + y_w^2)]}{y_w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_{e} = \frac{2kx_{w} - \sqrt{(-2kx_{w})^{2} - 4(x_{w}^{2} + y_{w}^{2})(k^{2} - d_{2}^{2}y_{w}^{2})}}{2(x_{w}^{2} + y_{w}^{2})} \\ y'_{e} = \frac{k - x_{w}[2kx_{w} - \sqrt{(-2kx_{w})^{2} - 4(x_{w}^{2} + y_{w}^{2})(k^{2} - d_{2}^{2}y_{w}^{2})}]/[2(x_{w}^{2} + y_{w}^{2})]}{y_{w}} \end{cases}$$
(5)

其中
$$k = (x_w^2 + y_w^2 + z_w^2 + d_2^2 - d_4^2)/2$$

对应第 1 关节角有两个值分别为
 $\theta_{11} = \arctan(-x_e, y_e)$ (6)
 $\theta_{12} = \arctan(-x_e, y_e)$ (7)
求解第 2 关节角,在 $\triangle O_0 EW$ 和 $\triangle ABW$ 中有
 $\begin{cases} l_1 = l_{o_0 W} = \sqrt{x_w^2 + y_w^2 + z_w^2} \\ p = (l_{o_0 E} + l_{o_0 W} + l_{EW})/2 = (d_2 + l_1 + d_4)/2 \\ S_{\triangle O_0 EW} = \sqrt{p(p - d_2)(p - d_4)(p - l_1)} \\ S_{\triangle O_0 EW} = l_{o_0 E} l_{BW}/2 = d_2 l_{BW}/2 \end{cases}$ (8)
求得 $|\theta_2| = \angle ABW = \arcsin(l_{WA}/l_{WB}) = \arctan(|z_w|/(2\sqrt{p(p - d_2)(p - d_4)(p - l_1)}/d_2))$

对于第1关节角取不同的值,第2关节角共有4组解,前两组解相差180°,对应第1关节角的第1

(15)

个解;后两组解相差180°,对应第1关节角的第2个解。

求解第3关节角,在 $\Delta O_0 EW$ 中有 $|\theta_3| = \angle WEB = \arcsin(l_{BW}/l_{WE}) =$ $\arcsin((2\sqrt{p(p-d_2)(p-d_4)(p-l_1)}/d_2)/d_4)$ (10)

第3关节有两组互为相反数的解,第1组解对 应第2关节角的前两组解,第2组解对应第2关节 的后两组解。

前3个关节角组合原则:①将机械臂前3关节 角置零。②转动第3关节至为其分配的角度正负 值。③转动第2关节到腕部位置。由腕部空间位置 关系、第1关节两组解的大小关系和第3关节角度 的正负值,可得到机械臂第2关节4组解与前2个 关节角度的搭配关系。

特殊情况处理:当腕部位置位于平面 $O_0 x_0 y_0 z_0$ 内时,其在该平面上的投影长度最长,机械臂的第 3 关节角到达其极限值 120°或 – 120°,所对应的角度 $\angle EO_0 W$ 最大。在 $\triangle EO_0 W$ 中有

$$l_{o_0W} = \sqrt{d_4^2 + d_2^2 - 2d_2d_4\cos(\angle O_0EW)} \quad (11)$$
$$\angle EO_0W = \arccos((d_2^2 + l_{o_0W}^2 - d_4^2)/(2l_{o_0W}d_2)) \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\angle} EO_0 E' = \boldsymbol{\pi} - 2 \boldsymbol{\angle} EO_0 W \tag{13}$$

当第1关节2个角度值中的大值处于坐标系 $O_0 x_0 y_0 z_0$ 第1、2象限中除 β 角外的区域内,且小值 处于第3、4象限除 – β 角外的区域内时,如图5所 示,第2关节需要改变转向。



图 5 关节角度范围 Fig. 5 Range of joint angle

2.2 求解 θ_4 、 θ_5 和 θ_6

由于前 3 个关节解已知,后 3 个关节采用反变 换法,对矩阵⁰ T_6 进行变量分离,从中找到一个等式 进而求解。两边依次乘以⁰ T_1^{-1} , $^1T_2^{-1}$, $^2T_3^{-1}$ 有

$${}^{3}\boldsymbol{T}_{4}{}^{4}\boldsymbol{T}_{5}{}^{5}\boldsymbol{T}_{6} = {}^{2}\boldsymbol{T}_{3}{}^{-1}{}^{1}\boldsymbol{T}_{2}{}^{-1}{}^{0}\boldsymbol{T}_{1}{}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_{x} & \boldsymbol{o}_{x} & \boldsymbol{a}_{x} & \boldsymbol{p}_{x}\\\boldsymbol{n}_{y} & \boldsymbol{o}_{y} & \boldsymbol{a}_{y} & \boldsymbol{p}_{y}\\\boldsymbol{n}_{z} & \boldsymbol{o}_{z} & \boldsymbol{a}_{z} & \boldsymbol{p}_{z}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix}$$

$$(14)$$

$$\begin{cases} c_4 = a_x (c_3 c_2 c_1 - s_3 s_1) + a_y (c_3 c_2 s_1 + s_3 c_1) - a_z c_3 s_2 \\ s_4 = -a_x s_2 c_1 - a_y s_2 s_1 - a_z c_2 \\ \theta_4 = \arctan(s_4/c_4) \end{cases}$$

进一步分离变量求解第5关节得

$$\begin{cases}
s_{5} = -(p_{x}c_{1}c_{4}c_{3}c_{2} + p_{y}s_{1}c_{4}c_{3}c_{2} - p_{z}s_{4}c_{2} - d_{2}c_{4}s_{3} - p_{x}c_{4}s_{3}s_{1} + p_{y}c_{4}s_{3}c_{1} - p_{y}s_{1}s_{4}s_{2} - p_{x}c_{1}s_{4}s_{2} - p_{z}c_{4}c_{3}s_{2})\\ c_{5} = -d_{2}c_{3} + p_{z}s_{3}s_{2} - p_{x}s_{3}c_{2}c_{1} - d_{4} - p_{y}s_{3}c_{2}s_{1} - p_{x}c_{3}s_{1} + p_{x}c_{3}c_{1}\\ \theta_{5} = \arctan(s_{5}/c_{5})
\end{cases}$$
(16)

同理,解得第6关节角为

$$\begin{cases} s_{6} = - \left\{ \left[\left(s_{4}c_{3}c_{2} + c_{4}s_{2} \right)c_{1} - s_{4}s_{3}s_{1} \right]n_{x} + \left(s_{4}c_{3}c_{2} + c_{4}s_{2}s_{1} + s_{4}s_{3}c_{1} \right)n_{y} + \left(-s_{4}c_{3}s_{2} + c_{4}c_{2} \right)n_{z} \right\} \\ c_{6} = - \left\{ \left[\left(s_{4}c_{3}c_{2} + c_{4}s_{2} \right)c_{1} - s_{4}s_{3}s_{1} \right]o_{x} + \left[\left(s_{4}c_{3}c_{2} + c_{4}s_{2} \right)s_{1} + s_{4}s_{3}c_{1} \right]o_{y} + \left(-s_{4}c_{3}s_{2} + c_{4}c_{2} \right)o_{z} \right\} \\ \theta_{6} = \arctan\left(s_{6}/c_{6} \right) \end{cases}$$

$$(17)$$

后 3 个关节为典型球腕结构,存在上仰腕和下 垂腕两种情况,在求取第 4 关节一组解后,第 2 组解 为 $\theta_4 = \theta_4 + \pi (若 \theta_4 + \pi > \pi, 则应为 \theta_4 = \theta_4 - \pi)$,再 根据式(16)与式(17)求得第 5、6 关节相对应的解, 可求得手臂逆运动学的 8 组逆解,各组解的关系采 用树形结构加以表示,如图 6 所示。



Fig. 6 Tree of inverse kinematics solutions

3 算法实现及验证

为了将机械臂运动学算法用于手臂实时控制, 并与机器人其他系统(视觉、导航、移动等)相融合, 开发了 VC + +6.0 下基于 MFC 的验证软件,该软 件分为:①正运动学模型验证。②逆运动学算法验 证。③逆解选取。通过将正逆运动学的求解放于同 一界面,以验证各关节空间组合与末端执行器位姿 对应关系的正确性,其中各模块间的几何尺寸关系 为: $d_2 = 328$, $d_4 = 276.5$, $d_6 = 345.2$ 。

3.1 运动学正解验证

图 1 为机械臂所有关节角度都为零时的位姿, 此时机械臂末端的位置应为 y = 328 + 276.5 + 345.2 = 949.7,将软件中各关节角度置为零,可得到 此时的机械臂位置为(0,949.7,0),两者结果一致, 输入机械臂关节的几组特殊角度可得相同的结论。 为了进一步验证运动学正解算法的正确性,引入 Matlab 软件中的机器人工具箱,随机输一组关节角 度(-40,70,-20,30,50,-60),两者的位置计算 结果都为(645.676 1,600.000 8,87.263 46),机械 臂 Matlab 工具箱建模及正运动学计算结果对比验 证如图 7 与表 2 所示。而机械臂姿态通过右手法则 结合欧拉角定义可知程序运算是正确的,从而验证 了正运动模型建立的正确性及软件的可靠性。



图 7 机械臂 Matlab 工具箱建模

Fig. 7 Modeling based on Matlab of manipulator

表 2 机械臂正运动学验证

Tab. 2 Kinematics validation of manipulator

关节值	Matlab 结果	VC + +结果
- 40	645.6761	645.67610
70	600.000 8	600.000 80
- 20	87. 263 461	87.26346
30		35.048 10
50	姿态矩阵	59. 321 34
- 60		- 50. 272 63

3.2 运动学逆解验证

运动学逆解验证流程为:先在运动学正解文本 框中随机输入一组关节角度(10,30,50,70,90, 110),可以得到机械臂的位姿为(-157.75919, 393.87674,424.77408,-33.15399,22.52375, -70.86953),然后将所得到的位姿填入逆解运算 文本框所对应的文本框中中,得到对应此组位姿的 8组解,将逆解算出的8组关节角度,逐组代入正解 的输入文本框,可以得出与初始随机输入正解文本 框的一组关节角度对应的相同位姿,因此,这8组解 同时满足机械臂的同一组位姿要求。而在这8组解 中第4组解为(10,30,50,70,90,110),与正解计算 中所输入的角度相同,如表3所示。因为角度是随

	表 3	机械臂运动学逆解验证			
Tab. 3	Validation of manipulator inverse kinematics				

正解计算	关节值	10	30	50	70	90	110
	位姿值	- 157. 759 19	393.87674	424.774 08	- 33. 153 99	22. 523 75	- 70. 869 53
	组号 一	关节号					
		1	2	3	4	5	6
逆解计算	1	10.0000	- 150. 000 0	- 50. 000 0	70.0000	- 90. 000 0	- 70. 000 0
	2	10.0000	- 150. 000 0	- 50. 000 0	- 110. 000 0	90.0000	110.0000
	3	10.0000	30.0000	50.0000	- 110. 000 0	- 90. 000 0	- 70. 000 0
	4	10.0000	30.0000	50.0000	70.0000	90.0000	110.0000
	5	49.8725	- 30. 000 0	- 50. 000 0	- 51. 671 2	- 81. 937 6	- 22. 804 8
	6	49.8725	- 30. 000 0	- 50. 000 0	128.3288	81.9376	157. 195 2
	7	49.8725	150.000 0	50.0000	128.328 8	- 81. 937 6	- 22. 804 8
	8	49.8725	150.000 0	50.0000	- 51. 671 2	81.9376	157. 195 2
逆解选取	当前关节值	40	30	50	20	60	70
	选取结果	49.8725	- 30. 000 0	- 50. 000 0	- 51. 671 2	- 81. 937 6	- 22. 804 8

机输入的,并且总会找到一组解与输入值相对应,因 此可见运动学逆解的求解是正确可靠的。

3.3 运动学逆解选取

机械臂逆解的8组解都能同时满足同一组位姿 要求,而在实际控制系统中只能取其中一组解来执 行。采用"最短行程"准则进行择优,遵循"多动大 关节,少动小关节"的原则,该机械臂前3个连杆尺 寸较大,因此采取"大臂优先"原则,选取一组与机 械臂当前关节角度最接近的一组关节解。结合图 6 机械臂逆解树,算法流程图如图 8 所示, θ_{ij} 表示机械 臂当前第 j关节坐标, θ_{ij} 表示机械臂逆解第 i 组第 j关节坐标,其中 $i=1,2,\dots,8; j=1,2,\dots,6$ 。

假设机械臂目标位姿为(-157.759 19, 393.87674,424.77408,-33.15399,22.52375, -70.86953),而当前关节坐标为(40,30,50,20, 60,70),通过分析比较逆解的8组解,与当前最为接





Fig. 8 Flowchart of the shortest stroke

近的一组坐标是第5组解(49.8725, -30, -50, -51.6712, -81.9736, -22.8408), 而软件选取的也为第5组, 如表3所示, 从而验证了算法的正确性。

4 结束语

针对模块化关节构建的六自由度串联机械臂的 运动学问题,在分析机械臂结构的基础上,采用 DH 法建立了机械臂的关节连杆坐标系,得到了以关节 角度作为变量的矩阵,从而求得了机械臂位姿。采 用空间几何法与反变换法相结合的方法对机械臂的 逆运动学问题进行了求解,通过给出解的组合原则, 得到了机械臂的8组解析解,并绘制逆解树说明了 8组解的关系。最后通过用 VC++6.0编制基于 MFC 的程序,结合 Matlab 机器人工具箱,验证了正 运动学求解的正确性;通过随机输入关节角度,采用 "最短行程准则"对8组解进行选取,验证了逆解算 法及择优程序的正确性,该程序已成功应用于该机 械臂的运动控制。本文为与该机械臂具有相似结构 的机器人手臂提供了运动学正逆解的求解方法,也 为机械臂的轨迹规划与控制提供了理论依据。

参考文献

- 1 Primrose E J F. On the input-output equation of the general 7R mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 1986, 21(6): 509 ~ 510.
- 2 Kohli D, Osvatic M. Inverse kinematics of general 6R and 5R, P serial manipulators [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(4):922 ~ 931.
- 3 Manocha D, Canny J F. Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 5(10):648 ~ 657.
- 4 于艳秋,廖启征.基于有理数运算的一般 6R 机器人位置逆解算法[J].机械工程学报,2005,41(3):229~233. Yu Yanqiu, Liao Qizheng. Inverse kinematics analysis of general 6R serial robot based on rational [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(3):229~233. (in Chinese)
- 5 刘松国,朱世强,王宣银.基于矩阵分解的一般 6R 机器人实时高精度逆运动学算法[J].机械工程学报,2008,44(11): 304~309.

Liu Songguo, Zhu Shiqiang, Wang Xuanyin. Real-time and high-accurate inverse kinematics algorithm for general 6R robots based on matrix decomposition[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(11):304 ~ 309. (in Chinese)

6 刘华山,朱世强,吴剑波. 基于向量积的机器人实时性逆解算法[J]. 农业机械学报, 2009, 40(6):212~216. Liu Huashan, Zhu Shiqiang, Wu Jianbo. Real-time inverse kinematics algorithm based on vector dot product[J]. Transactions of

the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(6):212~216. (in Chinese)

7 钱东海,王新峰,赵伟,等.基于旋量理论和 Paden-Kahan 子问题的 6 自由度机器人逆解算法 [J]. 机械工程学报,2009, 45(9):72~76.

Qian Donghai, Wang Xinfeng, Zhao Wei, et al. Algorithm for the inverse kinematics calculation of 6-DOF robots based on screw theory and Paden-Kahan sub-problems [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(9):72 ~ 76. (in Chinese)

- 8 目世增,张大卫,刘海年.基于吴方法的 6R 机器人逆运动学旋量方程求解[J].机械工程学报,2010,46(17):35~41. Lü Shizeng, Zhang Dawei, Liu Hainian. Solution of screw equation for inverse kinematics of 6R robot based on Wu's method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(17):35~41. (in Chinese)
- 9 焦有宙,丁攀,赵大旭. 温室 3P3R 机械臂系统动力学建模与分析[J]. 农业机械学报, 2012, 43(5):179~183. Jiao Youzhou, Ding Pan, Zhao Daxu. Dynamic modeling and analysis for 3P3R universal manipulator in greenhouse [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(5):179~183. (in Chinese)
- 10 姜宏超,刘士荣,张波涛.六自由度模块化机械臂的逆运动学分析[J].浙江大学学报:工学版,2010,44(7):1348~1354.
- 11 Jovanovic V T, Kazerounian K. Using chaos to obtain global solutions in computational kinematics [J]. Journal of Mechanical, 1998, 120:299 ~ 304.
- 12 Huang Wuxin, Tan Shili. Inverse kinematics of compliant manipulator based on the immune genetic algorithm [C] // International Conference on Natural Comutation. Ji'nan, China, 2008: 390 ~ 394.
- 13 董云,杨涛,李文.基于解析法和遗传算法的机械手运动学逆解[J].计算机仿真,2012,29(3):239~243.
- 14 杭鲁滨, 王彦. 基于 Groebner 基法的一般串联 6R 机器人机构逆运动学分析[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6):853~856.
- 15 熊有伦, 唐立辛, 丁汉. 机器人技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2008.