DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.10.039

偏心变位齿轮设计与试验*

范素香1,2 侯书林1 赵 匀3

(1.中国农业大学工学院,北京 100083; 2.华北水利水电学院机械学院,郑州 450011;3.东北农业大学工程学院,哈尔滨 150030)

【摘要】 针对偏心齿轮齿隙变化设计一种传动机构,该传动机构由一个偏心齿轮和一个偏心变位齿轮组成以 确保齿隙保持在普通齿轮传动所要求的范围内;叙述了偏心变位齿轮的设计原理;利用工具齿条包络出齿轮的齿 廓,获得偏心变位齿轮的齿廓数据;采用粉末冶金的方法加工出偏心变位齿轮,应用于插秧机的偏心变位齿轮分插 机构,通过了田间测试。

关键词:偏心变位齿轮 水稻分插机构 设计 试验 中图分类号:TH132.4 文献标识码:A 文章编号:1000-1298(2012)10-0219-05

Design and Experiment of Eccentric Modified Gears

Fan Suxiang^{1,2} Hou Shulin¹ Zhao Yun³

(1. College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China 2. School of Mechanical Engineering, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450011, China

3. College of Engineering, Northeast Agricultural University, Harbin 150030, China)

Abstract

A transmission mechanism was proposed to solve the problem of tooth backlash change, composed by an eccentric gear and an eccentric modified gear. The design principle of the eccentric gears was described. According to the involutes tooth profile generating principle, the tooth profile data was obtained. The eccentric modified gears were manufactured through powder metallurgy and applied to the planetary transplanting mechanism. It passed the field testing.

Key words Eccentric modified gear, Rice planetary transplanting mechanism, Design, Experiment

引言

偏心圆齿轮由于设计简单、加工方便,在非匀速 运动的传动系统中得到比较广泛的应用,与椭圆和 非圆齿轮传动相比,偏心齿轮的齿隙在传动中周期 性变化,在高速运转的条件下会引起振动和转速跳 动,因此一般用于不精确的非匀速传动中。陈怡群 等^[1]没有研究偏心齿轮传动中齿隙的变化,其得到 的为近似轨迹。Guo L S 等指出偏心齿轮在啮合传 动过程中两齿轮的节曲线并不总相切,不能视作纯 滚动^[2]。赵匀等证明了偏心齿轮行星系传动的3个 重要性质^[3-4],并应用现代设计理论与方法优化水 稻插秧机核心工作部件^[5]。偏心齿轮行星系分插 机构是日本最早成功应用于高速插秧机分插机构的 机型之一,并一直使用至今^[6-7],为了消除齿隙,采 用了叠加双片齿轮和蜗卷弹簧。

本文设计一种消除齿隙的偏心变位齿轮传动机 构^[8]:一对偏心齿轮中的一个偏心齿轮通过齿轮变 位使节曲线与另一个偏心齿轮节曲线始终相切,确 保齿轮啮合过程中齿隙保持不变并对该机构进行理

*国家自然科学基金资助项目(50875244、51005214)

收稿日期: 2011-10-18 修回日期: 2011-12-01

作者简介:范素香,博士生,华北水利水电学院讲师,主要从事机构设计与制造研究,E-mail: fan_su@163.com

通讯作者:赵匀,教授,博士生导师,主要从事农业机械与机构设计理论研究,E-mail: zhaoyun@ neau.edu.cn

论分析和田间试验。

1 偏心齿轮和偏心变位齿轮传动原理

偏心齿轮之间传动会产生齿隙变化,因而在计 算偏心和偏心变位齿轮传动中的偏心变位齿轮变位 系数时,必须首先了解偏心齿轮传动齿隙变化规律。 在研究偏心变位与偏心齿轮传动的行星系分插机构 秧爪尖轨迹时,用偏心齿轮传动替代偏心和偏心齿 轮传动行星系分插机构,将简化分析过程,同样满足 秧爪轨迹和角位移精度要求。

2 个相同的偏心齿轮 I 和 II 啮合,如图 1 所示, 初始位置时,轴心线 *OB* 与 *x* 轴的夹角为 φ_0 ,*OO*₁与 *OB* 重合,*BO*₂在 *OB* 延长线上。当齿轮 I 转过 φ_1 , 齿轮 II 转过 φ_2 ,*O*₁*O*₂ 与 *OB* 交于 *A* 点。



图 1 偏心齿轮传动示意图 Fig. 1 Sketch of eccentric gear-drive

根据偏心齿轮的传动性质^[3],齿轮Ⅰ和Ⅱ任意 位置几何中心距为

$$l_{o_1 o_2} = l_{A o_1} + l_{A o_2} = \frac{a(|\sin\varphi_1| + |\sin\varphi_2|)}{2|\sin\theta_1|} \quad (1)$$

式中 a——两齿轮轴心距

由式(1)可知,在偏心齿轮副传动过程中,两齿 轮几何中心距随着齿轮的角位移不断变化,因此齿 侧间隙也在不断变化。

在任意时刻,可以将偏心齿轮传动看作两中心 距为 *l*₀₁₀₂的标准圆柱齿轮的啮合,其转动中心分别 是 *O*₁ 和 *O*₂,只是两齿轮中心距不再始终是标准中 心距,而在两偏心齿轮啮合齿面之间产生了侧隙。 将齿轮角位移在 0°~360°范围内分为 *N* 份,每份对 应齿轮的节曲线上的一点,在每点对齿轮进行角变 位,从而改变轮齿的齿厚,使齿侧间隙为零。

根据中心距与压力角的关系^[9],可以求出实际 压力角

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a_0 \cos\alpha_0}{l_{o_1 o_2}}\right)$$
(2)
式中 a_0 —标准中心距, $a_0 = 2R$

α₀——标准齿轮压力角

假设两偏心齿轮间的齿侧间隙为 C,为了补偿 齿侧间隙,对偏心齿轮进行变位,偏心变位齿轮传动 满足无齿侧间隙啮合条件。无齿侧间隙啮合方程式 为^[10]

$$\operatorname{inv} \alpha = \frac{2(x_1 + x_2) \tan \alpha_0}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv} \alpha_0$$
(3)

其中
$$inv\alpha = tan\alpha - \alpha$$
 $inv\alpha_0 = tan\alpha_0 - \alpha_0$
式中 $z_1 \ z_2$ — 齿轮 I 、II 齿数, 且 $z_1 = z_2 = z$

*x*₁,x₂→→齿轮Ⅰ、Ⅱ变位系数

由于偏心齿轮容易加工,因此令偏心齿轮 I 保 持不变,仅对偏心齿轮 Ⅱ进行变位,即

$$x_1 = 0$$
 $x_2 = 3$

求得齿轮Ⅱ的变位系数为

$$x = z(\operatorname{inv}\alpha - \operatorname{inv}\alpha_0) / \tan\alpha_0 \tag{4}$$

从而偏心齿轮的齿侧间隙为

$$C = 2mx \tan \alpha \tag{5}$$

图 2 为齿间齿侧间隙 C 与角位移 φ₁ 和偏心率 ε 的关系。从图中可以看出,齿侧间隙在齿轮转动 的一周内周期性变化,随着偏心率增加,齿侧间隙增 大,远远超过了允许范围。如果将此种齿轮应用到 水稻插秧机分插机构上,齿侧间隙通过齿轮和栽植 臂将会传递到秧针上,造成分插机构振动和秧针摆 动,轻则导致取秧量不均,重则造成秧针取不到秧或 碰撞秧门。



图 2 齿侧间隙 C 与角位移 φ_1 和偏心率 ε 的关系

Fig. 2 Relationship of backlash C , angular displacement φ_1 and eccentricity ε

为避免变位系数过大而减小重合度,并为了减 小结构尺寸,在满足齿轮强度且不发生根切的前提 下适当减小轴心距。偏心齿轮与偏心变位齿轮的轴 心距为^[11]

$$a = dR \tag{6}$$
$$d = 2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{35\varepsilon^4}{22}$$

式中 d——两齿轮的相对中心距

其中

图 3 为变位系数 x 与角位移 φ_1 和偏心率 ε 的 关系。从图中可以看出,变位系数有正有负。如果 偏心量为零,则变位系数为零,无需进行变位,如果 偏心量不为零,则变位系数周期性变化,齿轮旋转一周波动两次,偏心率越大,波动越大,且波动规律一致。在 0°和接近 180°时变位系数最大,在略小于 90°和略大于 270°时,变位系数最小。





displacement φ_1 and eccentricity ε

2 偏心变位齿轮设计

采用变位方法生成的偏心变位齿轮,其加工方 法与椭圆和非圆齿轮一样,加工实质是齿条刀具节 直线与偏心齿轮节曲线相切并作纯滚动,须在齿条 刀具的垂直方向叠加一个变位量 mx,从而包络出偏 心变位齿轮的渐开线齿廓。

齿轮齿数设计为奇数,初始位置时,主动偏心齿 轮长轴的一端是一个轮齿,共轭偏心变位齿轮对应 的是一个齿槽。计算机模拟加工时轮 I 绕轴心顺时 针转动,轮 II 绕轴心逆时针转动,齿条刀具一边向下 平移,向下平移的距离为齿轮转过角度所对应的弧 长;一边水平平移并旋转一定角度,保证齿条节直线 与两节曲线相切。

假设偏心变位齿轮的齿坯固定,齿条刀具节直 线绕齿坯节曲线作纯滚动,图4为齿条刀具与偏心 变位齿轮的齿坯位置关系。



图 4 齿条刀具与齿坯的位置关系 Fig. 4 Relationship of tooth rack and gear blank

偏心齿轮Ⅱ的节曲线极坐标方程

$$r_{2} = \sqrt{R^{2} - e^{2} \sin^{2} \varphi_{2}} + e \cos \varphi_{2}$$

则偏心变位齿轮节曲线的极坐标方程为
$$r_{3} = \sqrt{R^{2} - e^{2} \sin^{2} \varphi_{2}} + e \cos \varphi_{3} + mx$$
(7)

设在起始位置时,齿条刀具的节直线与偏心齿 轮齿坯的节曲线相切在 A 点,当齿条刀具节直线沿 齿轮节曲线纯滚动到极角 φ_{2i} 时,与齿坯节曲线相切 于 B 点,节直线与径矢 OB 的夹角 μ_i 为^[12]

$$\mu_{i} = \arctan \frac{r_{3}(\varphi_{2i})}{\left(\frac{\mathrm{d}r_{3}}{\mathrm{d}\varphi_{2}}\right)\varphi_{2i}}$$
(8)

此时 A 点移到 A'点, AB 间的弧长 S 同 A'B 间的 距离相等, 即

$$S = l_{A'B} = \int_{0}^{\varphi_{2i}} \sqrt{r_{3}^{2} + (\,\mathrm{d}r_{3}/\mathrm{d}\varphi_{2}\,)^{2}}\,\mathrm{d}\varphi_{2} \qquad (9)$$

齿条的转角 θ_i 为

$$\theta_i = \varphi_{2i} + \mu_i - \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

齿条旋转一周,根据式(8)~(10),便可包络出 工件齿轮Ⅱ的节曲线。

在齿条节直线包络出工件齿轮节曲线的基础 上,齿条齿形包络出齿轮的渐开线齿廓。工具齿条 由若干个齿组成,每个齿可由4个顶点表示(图4), 第1齿由1、2、3、4四个顶点组成,其他齿由第1齿 通过坐标平移得到。当齿坯角位移 φ₂所对应的弧 长*S*大于一个齿距*p*或齿距的整数倍时,齿条刀具 的坐标 *y*向量前移齿距 *p*的整数倍,保证每次都有 足够的齿条齿数包络齿轮。在齿条坐标系中工具齿 条的数学模型用矩阵形式表示为

$$x_{0} = 1.25m \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_{0} = \begin{bmatrix} -\frac{3\pi m}{4} - l_{m} & -\frac{3\pi m}{4} + l_{m} \\ -\frac{\pi m}{4} - l_{m} & -\frac{\pi m}{4} + l_{m} \end{bmatrix} + n\pi m \qquad (11)$$

其中 $l_m = 1.25m \tan \alpha$

式中 n——齿条的齿数

将齿条转至与齿坯节曲线相切方向,则数学模型为

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos(\mu - \pi/2) - \\ (y_0 - S + n\pi m) \sin(\mu - \pi/2) \\ y_1 = x_0 \sin(\mu - \pi/2) - \\ (y_0 - S + n\pi m) \cos(\mu - \pi/2) \end{cases}$$
(12)

将齿条放至与齿坯相切并作纯滚动位置,然后 偏移 mx 进行变位,则数学模型为

$$\begin{cases} x_3 = (x_1 + r_2 + mx)\cos\varphi_2 - y_1\sin\varphi_2\\ y_3 = (x_1 + r_2 + mx)\sin\varphi_2 + y_1\cos\varphi_2 \end{cases}$$
(13)

随着 φ₂ 不断变化,齿条旋转一周,包络出偏心 变位齿轮齿廓,如图 5 所示。

新开线齿廓由包络线交点连接而成,偏心变位 齿轮的齿顶曲线是距节曲线距离为 mh_a*的法向等



Fig. 5 Tooth profile envelopment

距线,齿根过渡曲线是由齿条齿顶线段的顶点包络 而成,由此将齿轮所有齿的齿根过渡曲线、渐开线齿 廓及齿顶曲线的齿廓特征点按顺序依次连接成完整 的齿廓。

3 设计实例与试验

根据上述齿廓生成方法,在 Matlab 环境中设计 了偏心变位齿轮的齿廓计算软件。

程序由界面显示、根切判别、齿轮参数计算、齿 廓包络、交点计算、特征点排序、数据输出等模块组 成。以偏心-变位行星系分插机构中的齿轮为例验 证偏心变位齿轮设计的正确性。已知偏心齿轮齿数 *z* = 17,模数 *m* = 2.5 mm,偏心距 *e* = 3.5 mm。偏心 齿轮和共轭齿轮轴心距 *a* 为 42.8 mm。生成的齿轮 齿廓如图 6 所示。



图 7 是偏心齿轮分别与偏心齿轮和偏心变位齿 轮啮合的对比放大图。从图中可以看出,两个偏心 齿轮 1 和 3 啮合时存在侧隙,而偏心齿轮 1 和偏心 变位齿轮 2 啮合时没有侧隙。在初始位置两个偏心 齿轮的节曲线是相离的,而偏心齿轮与偏心变位齿 轮的节曲线是相切的。在整个啮合过程中,两偏心 齿轮的节曲线时而分离时而相交,只在某些特定点 相切,这也证明了两节曲线始终相切并作纯滚动的 假设是不成立的,所以两齿轮啮合时存在齿侧间隙。 而偏心齿轮与偏心变位齿轮的节曲线始终相切并作 纯滚动,啮合无齿侧间隙。



图 7 啮合对比放大图

Fig. 7 Comparison of enlarged diagram of gear meshing
1. 偏心齿轮齿廓 2. 共轭偏心变位齿轮齿廓 3. 共轭偏心齿轮
齿廓 4. 共轭偏心齿轮节曲线 5. 共轭偏心变位齿轮节曲线
6. 偏心齿轮节曲线

为保证齿轮齿面间形成润滑油膜和防止热膨胀 变形使齿轮卡死,齿轮副啮合时须有适当的齿侧间 隙,齿侧间隙由制造公差保证,设计时仍按无齿侧间 隙啮合进行设计。本例中,偏心齿轮机构和偏心变 位齿轮机构的齿侧间隙如图 8 所示。可以看出,通 过变位方法生成的偏心变位齿轮机构齿侧间隙为 零,实现了无齿侧间隙啮合。



通过改进材料配比、增加齿轮厚度和增大齿轮 模数等方法,解决了粉末冶金齿轮的强度问题,且精 度可靠,成本仅为线切割齿轮的 1%。通过破坏性 试验,齿轮箱壳体破损和 φ19 mm 的传动轴扭曲,齿 轮未出现任何问题。

采用偏心变位齿轮的旋转行星系分插机构,如 图9所示。该分插机构由3个偏心齿轮1、3、5和 2个偏心变位齿轮2、4、行星架(齿轮盒)10及栽植 臂7、9构成,1、5为行星轮,3为太阳轮,2、4为中 间轮。利用偏心齿轮与偏心变位齿轮啮合来实现非 匀速传动,选择合适的偏心量和中心距来形成所要 求的非匀速传动比及转角关系,获得满足高速插秧 机工作要求的"腰子形"静轨迹8,该机构同时适合 不同大小的秧苗插秧要求。

将偏心变位齿轮行星系分插机构应用于6行宽 窄行乘坐式插秧机,对该插秧机进行田间试验,试验





1、5.行星轮(偏心齿轮) 2、4.中间轮(偏心变位齿轮) 3.太阳轮(偏心齿轮) 6.秧门 7、9.栽植臂 8."腰子形"静轨迹
10.行星架





图 10 试验样机 Fig. 10 Experimental prototype

图 11 为分插机构的对比图。图 11a 为日本偏 心齿轮分插机构齿轮箱,该机构共有 9 个半径、偏心 距相同的偏心齿轮,行星齿轮和中间齿轮由两片薄 片齿轮叠加而成并错位安装,2 个定位销分别固定 在 2 个叠加的偏心薄齿轮上,蜗卷弹簧使相啮齿轮 贴紧。图 11b 为偏心变位齿轮分插机构齿轮箱,本 项目所采用的偏心变位齿轮分插机构只用了 5 个齿 轮,简化了机构。

试验地点是黑龙江省农垦局建三江农场七星分场,试验地块面积为 0.7 hm²,泥碎田平,泥脚深度 170 mm,采用育秧盘育秧,盘土不松散,秧针盘结,秧苗平均高度为 150 mm,叶龄 3~4 叶,秧盘宽度为 300 mm,土层厚 19~21 mm,土壤含水率 48%。田间试验结果如表 1 所示。



图 11 分插机构对比

 Fig. 11
 Comparison of transplanting mechanism

 (a) 日本偏心齿轮分插机构
 (b) 偏心变位齿轮分插机构

表 1 田间试验结果 Tab. 1 Field experimental results

参数	技术要求	试验结果	单项
		(平均)	判定
相对均匀度/%	≥85	93	合格
插秧深度/mm	10 ~ 35	20	合格
行距/mm	宽行:400	宽行:402	满足要求
	窄行:200	窄行:198	
插秧深度合格率/%	≥90	94	合格
漏插率/%	≤5	1.3	合格
伤秧率/%	≤4	2.0	合格
漂秧率/%	≤3	1.4	合格
翻倒率/%	≤3	2.0	合格
作业小时生产率/hm ² ·h ⁻¹	0.3~0.5	0.38	合格

从试验情况来看,样机作业质量较好,主要测试 性能指标均达到设计要求。

4 结论

(1)根据齿隙变化规律对偏心齿轮进行非零不等量变位的方法是可行的;通过非零不等量变位的方法生成的偏心变位齿轮,可行消除齿侧间隙,实现无齿侧间隙啮合。

(2)变位量取决于啮合轮齿侧间隙,齿侧间隙 取决于中心距变动系数,中心距变动系数取决于齿 轮节曲线的位置。因此,变位量取决于齿轮节曲线 位置。

(3) 配置偏心变位齿轮分插机构的水稻斜置式 宽窄行插秧机检测报告表明, 作业质量较好, 测试性 能指标达到国家标准。

参考文献

1 陈怡群,袁钊和.偏心行星轮系分插机构的优化设计[J].农业机械学报,1992,23(1):28~33.

Chen Yiqun, Yuan Zhaohe. Parameter optimization of transplanting mechanism with planetary eccentric gears [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 1992, 23(1): 28 ~ 33. (in Chinese)

2 Guo L S, Zhang W J. Kinematic analysis of a rice trans-planting mechanism with eccentric planetary gear trains [J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(11~12): 1 175~1 188. (下转第 234 页)

参考文献

- 1 Choi S B, Kim J S. A fuzzy sliding mode controller for robust tracking of robotic manipulators [J]. Mechatronics, 1997, 7(2):199~216.
- 2 Ha Q P, Rye D C, Durrant-Whyte H F. Fuzzy moving sliding mode control with application to robotic manipulators [J]. Automatica, 1999,35(4):607~616.
- 3 Kaynak O, Erbatur K, Ertugrul M. The fusion of computationally intelligent methodologies and sliding mode control—a survey [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2001,48(1):4~17.
- 4 Tong S, Li H X. Fuzzy adaptive sliding mode control for MIMO nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003,11(3):354 ~ 360.
- 5 Chen C S, Chen W L. Robust adaptive sliding mode control using fuzzy modeling for an inverted-pendulum system [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1998,45(2):297 ~ 306.
- 6 Noroozi N, Roopaei M, Jahromi M Z. Adaptive fuzzy sliding mode control scheme for uncertain systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009,14(11):3 978 ~ 3 992.
- 7 Roopaei M, Sahraei B R, Lin T C. Adaptive sliding mode control in a novel class of chaotic systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010,15(12);4 158 ~ 4 170.
- 8 Xiang W, Chen F Q. An adaptive sliding mode control scheme for a class of chaotic systems with mismatched perturbations and input nonlinearities [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011,16(1):1~9.
- 9 Wang J, Rad A B, Chan P T. Indirect adaptive fuzzy sliding mode control: part I : fuzzy switching[J]. Fuzzy Set and System, 2001,122;21 ~ 30.
- 10 Akbarzadeh T, Shahnazi R. Direct adaptive fuzzy PI sliding mode control for a class of uncertain nonlinear systems [C] // 2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Hawaii: IEEE Press, 2005, 3:2 548 ~ 2 553.
- 11 白寒,王庆九,徐振,等. 阀控非对称缸系统多级滑模鲁棒自适应控制[J]. 农业机械学报, 2009,40(10):193~198. Bai Han, Wang Qingjiu, Xu Zhen, et al. Multiple sliding mode robust adaptive control for valve controlled asymmetric cylinder system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(10):193~198. (in Chinese)
- 12 刘涛,刘清河,姜继海.静液传动系统自适应模糊滑模控制[J].农业机械学报,2010,41(1):29~33. Liu Tao, Liu Qinghe, Jiang Jihai. Adaptive fuzzy sliding mode control for hydrostatic transmission system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010,41(1):29~33. (in Chinese)

(上接第 223 页)

- 3 Zhao Yun, Sun Liang, Yu Gaohong. Properties and applications of the eccentric-gear drive [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(2):323 ~ 331.
- 4 赵匀.农业机械分析与综合[M].北京:机械工业出版社,2008.
- 5 赵匀,赵雄,张玮炜,等.水稻插秧机现代设计理论与方法[J].农业机械学报,2011,42(3):65~68. Zhao Yun, Zhao Xiong, Zhang Weiwei, et al. Modern design theory and method of rice transplanter[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2011,42(3):65~68. (in Chinese)
- 6 田吉健二. 早期水稻的栽培用插秧机关键部件的基础研究[J]. 農業機械學會誌, 1998, 60(4): 13~22. Taki K. Basic research of key components of rice transplanter for early rice planting[J]. Journal of the Japanese Society of Agricultural Machinery, 1998, 60(4):13~22. (in Japanese)
- 7 小西达也.高速插秧机的开发[J].農業機械學會誌,1989,51(6):89~95. Konoshi T. Development of high performance rice transplanter[J]. Journal of the Japanese Society of Agricultural Machinery, 1989, 51(6): 89~95. (in Japanese)
- 8 浙江理工大学. 偏心变位齿轮传动机构:中国, 200910098664.5[P]. 2009-10-21.
- 9 孙桓,陈作模.机械原理[M].北京:高等教育出版社,1996.
- 10 郭克强. 渐开线变位齿轮传动[M]. 北京:高等教育出版社, 1985.
- 11 李福生.非圆齿轮与特种齿轮传动[M].北京:机械工业出版社,1983.
- 12 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2版. 北京:北京大学出版社, 2003.