

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.10.036

基于解域的四精确点球面 4R 机构函数综合^{*}

杨 通¹ 韩建友¹ 尹来容²

(1. 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083; 2. 长沙理工大学机械与汽车工程学院, 长沙 410114)

【摘要】 提出了一种基于解域的四精确点球面 4R 机构函数综合方法。首先通过相对运动转换将函数综合转换为位置综合。接着给出了球面布氏曲线的方程式及布氏点的计算和分类方法。最后通过具体的示例建立了机构类型解域,将无穷多机构解表示在有限的环形区域内,从而使设计者能够直观准确地了解机构的类型及其分布区间。

关键词: 球面机构 函数综合 四精确点 解域
中图分类号: TH122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)10-0200-07

Spherical 4R Function Synthesis Based on Solution Regions for Four Precision Points

Yang Tong¹ Han Jianyou¹ Yin Lairong²

(1. School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China
2. School of Automotive and Mechanical Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract

A synthesis approach was introduced for spherical 4R function generator of four precision points. Firstly, the spherical 4R function synthesis was converted to motion generation synthesis by employing an inversion method. The equations of spherical Burmester curves were derived. The calculation and classification of Burmester points were introduced. Then mechanism types of an infinite number of solutions are expressed on finite circle solution regions with illustrative examples.

Key words Spherical mechanism, Function synthesis, Four precision points, Solution regions

引言

对于给定两连架杆若干组对应角位移的球面 4R 机构函数综合有许多综合方法^[1~9]。Chiang 利用相对极理论对 4、5 个精确点问题进行了研究^[1~4]。Cervantes-Sánchez 以球面四杆机构输入输出角的关系为基础,对 3~6 个精确点的问题进行了研究,尤其在 6 个精确点问题上,以 10 阶多项式代替以前的 16 阶多项式,使计算大大简化^[5~6]。王德伦等对多于 5 个精确点的问题给出了球面曲线的自适应圆弧拟合方法,建立了球面运动近似函数综合

的数学模型和鞍点规划求解方法^[8]。褚金奎等提出了一种球面四杆机构函数综合的傅里叶级数法,建立了球面四杆机构输入输出函数的数值图谱库^[9]。对于给定条件的 4 个精确点的情况,由于在球面布氏曲线上任意选取球面圆点及圆心点都可得到球面四杆机构,因此有无穷多机构解。要求设计者了解全部机构解的类型及性能特性并能直观、准确、快速地选出满足设计要求的机构是很困难的,而上述方法均没有解决这些问题。

本文提出一种基于解域的四精确点球面 4R 机构函数综合方法。首先通过相对运动转换将函数综

收稿日期: 2011-11-07 修回日期: 2012-02-13
^{*} 国家自然科学基金资助项目(50975024)和北京市自然科学基金资助项目(3102021)
作者简介: 杨通,博士生,主要从事机构综合及稳健设计、机构 CAD 研究,E-mail: yangtong_ustb@foxmail.com
通讯作者: 韩建友,教授,博士生导师,主要从事机构分析与综合理论、机构动力平衡及机构 CAD 研究,E-mail: jyhan@ustb.edu.cn

合转换为位置综合,并给出球面布氏曲线的表达式及任意布氏点的计算方法。然后通过对布氏点的分类,建立点的球坐标参数和机构解的映射关系,以期得到机构类型解域及性能曲线图,从而将无穷多机构解表示在有限的区域内。

1 函数综合向位置综合的转换

用运动转换法将函数综合转换为位置综合,并给出转换后连杆点位置参数的表达式。为了叙述和运算方便,本文采用球坐标表示球面上的一点,但在进行坐标变换时仍采用直角坐标表示。

1.1 球面上刚体位置的表示

球面上任意一点 P 的坐标可以表示为

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\alpha \\ y = r\cos\beta\sin\alpha \\ z = r\sin\beta \end{cases} \quad (1)$$

其中 r 为球半径,取 $r = 1$,这并不影响公式的推导。因此点 P 的位置可以由参数 (α, β) 表示, α 为经度, β 为纬度,其中 $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$,如图 1 所示。

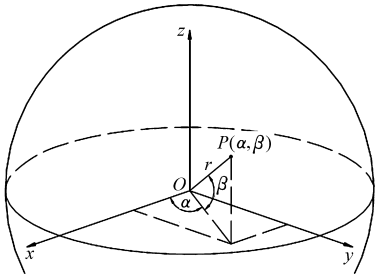


图 1 空间点的球坐标表示
Fig. 1 Spherical coordinates of a spatial point

在球面上运动的一个刚体,其位置由刚体上一点 P 以及任选的一段圆弧 $\widehat{PL}$ 的方位来确定。方位角 θ 定义为圆弧 $\widehat{PL}$ 和过 P 点的纬线 l_P 的夹角。设纬线 l_P 在 P 点处的切线为 PQ ,过 PQ 及 O 点的平面为 OPQ ,过圆弧 $\widehat{PL}$ 及 O 点的平面为 OPL ,则方位角 θ 即为平面 OPQ 和 OPL 所构成的二面角,如图 2 所示。

1.2 相对运动转换

球面 4R 机构的示意图如图 3 所示。其中, O_A 、 O_B 、 A 和 B 为 4 个转动副的中心点,其轴线交于点 O 。 O_A 、 O_B 为固定铰链点, A 、 B 为动铰链点。输入杆的转角 φ 为圆弧 $\widehat{O_A A}$ 和 $\widehat{O_A O_B}$ 的夹角,即为平面 $OA O_A$ 和 $OO_B O_A$ 构成的二面角 $\angle A O_A O_B$ 。同理可定义输出杆的转角 ψ 。杆长以两个转动副轴线的夹角表示,分别为 γ_1 、 γ_2 、 γ_3 和 γ_4 。

函数综合就是综合出一个球面四杆机构,使其

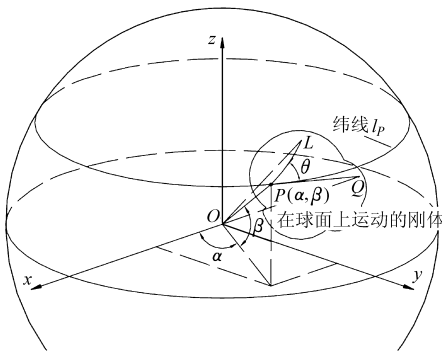


图 2 球面上运动刚体位置的确定
Fig. 2 Orientation of rigid body in sphere

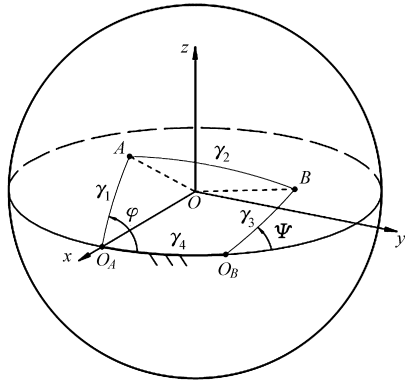


图 3 球面 4R 机构示意图
Fig. 3 A spherical 4R linkage

两连架杆的输入、输出角满足给定的关系,即满足当其输入杆转角为 φ_1 、 φ_2 、 $\dots$ 、 φ_N 时,相应的输出杆转角为 ψ_1 、 ψ_2 、 $\dots$ 、 ψ_N , $O_A E_i$ 和 $O_A F_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 分别表示输入杆和输出杆的位置,如图 4 所示。

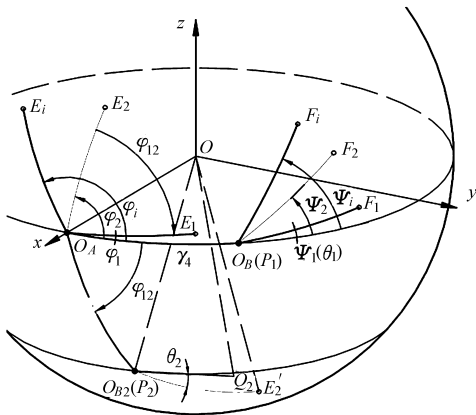


图 4 球面四杆机构函数综合模型
Fig. 4 Function synthesis model of spherical 4R linkage

建立如图 4 所示坐标系 $Oxyz$,即 O 为坐标原点, x 轴与 OO_A 重合,在平面 $OO_A O_B$ 内作 y 轴与 x 轴垂直,过 O 点按右手坐标系得与平面 $OO_A O_B$ 垂直的 z 轴。运用机架转换法需要给定机架 γ_4 的长度,则固定铰链点 $O_A(0, 0)$ 和 $O_B(\gamma_4, 0)$ 的坐标为已知。要综合球面四杆机构即要确定动铰链点 A 和 B 的坐标。

图 4 中 $O_A E_i F_i O_B$ 表示球面四杆机构的第一位

(α_i, β_i) ($i = 2, 3, 4$) 以及连杆相对于第 1 位置的转角 θ_i 确定。设在坐标系 xyz 中刚体上任一点在位置 1 处的坐标为 $(x_1, y_1, z_1)^T$, 当刚体运动到位置 i 时相应的该点坐标为 $(x_i, y_i, z_i)^T$ 。从 $(x_1, y_1, z_1)^T$ 到 $(x_i, y_i, z_i)^T$ 的变换可以看作以下 3 个转动的结果: ①先将 OP_1 向 x 轴转拢。②再绕 x 轴旋转 $\theta_{1i} = \theta_i - \theta_1$ 。③最后将 x 轴转开至 OP_i 。

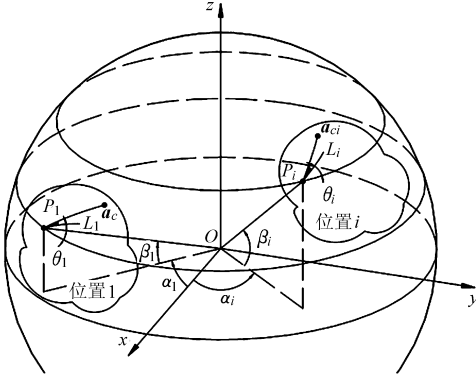


图 6 刚体球面运动示意图

Fig. 6 Spherical motion of rigid body

第 1 个过程可以看作先绕 z 轴旋转 α_1 , 再绕 y 轴旋转 β_1 ; 第 3 个过程可以看作先绕 y 轴旋转 β_i , 再绕 z 轴旋转 α_i 。则从 $(x_1, y_1, z_1)^T$ 到 $(x_i, y_i, z_i)^T$ 的变换式可以写为

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z^{\alpha_i} \mathbf{R}_y^{\beta_i} \mathbf{R}_x^{\theta_{1i}} \mathbf{R}_y^{\beta_1} \mathbf{R}_z^{\alpha_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{1i} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

注意到所有的变换都是在同一坐标系 xyz 中进行的, 因此后一个变换矩阵要左乘到前一个变换矩阵。

矩阵 $\mathbf{C}_{1i}$ 为球面运动刚体从位置 1 到位置 i 的位移矩阵, 有

$$\mathbf{C}_{1i} = \begin{bmatrix} C_{11i} & C_{12i} & C_{13i} \\ C_{21i} & C_{22i} & C_{23i} \\ C_{31i} & C_{32i} & C_{33i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 $C_{11i} = \cos\alpha_i \cos\beta_i \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \sin\alpha_1 (\sin\alpha_i \cos\theta_{1i} + \cos\alpha_i \sin\beta_i \sin\theta_{1i}) - \cos\alpha_1 \sin\beta_1 (\sin\alpha_i \sin\theta_{1i} - \cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$

$$C_{12i} = \cos\alpha_i \cos\beta_i \sin\alpha_1 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 (\sin\alpha_i \cos\theta_{1i} + \cos\alpha_i \sin\beta_i \sin\theta_{1i}) - \sin\alpha_1 \sin\beta_1 (\sin\alpha_i \sin\theta_{1i} - \cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$$

$$C_{13i} = \sin\beta_1 \cos\alpha_i \cos\beta_i + \cos\beta_1 (\sin\alpha_i \sin\theta_{1i} - \cos\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$$

$$C_{21i} = \sin\alpha_i \cos\beta_i \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 (\cos\alpha_i \cos\theta_{1i} - \sin\alpha_i \sin\beta_i \sin\theta_{1i}) + \cos\alpha_1 \sin\beta_1 (\cos\alpha_i \sin\theta_{1i} + \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$$

$$C_{22i} = \sin\alpha_i \cos\beta_i \sin\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 (\cos\alpha_i \cos\theta_{1i} - \sin\alpha_i \sin\beta_i \sin\theta_{1i}) + \sin\alpha_1 \sin\beta_1 (\cos\alpha_i \sin\theta_{1i} + \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$$

$$C_{23i} = \sin\beta_1 \sin\alpha_i \cos\beta_i -$$

$$\cos\beta_1 (\cos\alpha_i \sin\theta_{1i} + \sin\alpha_i \sin\beta_i \cos\theta_{1i})$$

$$C_{31i} = \sin\beta_i \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \cos\beta_i \sin\theta_{1i} - \cos\alpha_1 \sin\beta_1 \cos\beta_i \cos\theta_{1i}$$

$$C_{32i} = \sin\beta_i \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \cos\beta_i \sin\theta_{1i} - \cos\alpha_1 \sin\beta_1 \cos\beta_i \cos\theta_{1i}$$

$$C_{33i} = \sin\beta_1 \sin\beta_i + \cos\beta_1 \cos\beta_i \cos\theta_{1i}$$

设待求的球面圆心与圆点矢量分别为 $\mathbf{a}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 和 $\mathbf{a}_c = (x_c, y_c, z_c)^T$, 第 i 位置时的球面圆点矢量为 $\mathbf{a}_{ci} = (x_{ci}, y_{ci}, z_{ci})^T$, 则有

$$\mathbf{a}_{ci} = \mathbf{C}_{1i} \mathbf{a}_c \quad (9)$$

考虑到杆长不变, 因此有约束条件 $|\mathbf{a}_{ci} - \mathbf{a}_0| = |\mathbf{a}_{ci} - \mathbf{a}_0|$ ($i = 2, 3, 4$), 得到

$$x_0 x_c + y_0 y_c + z_0 z_c = x_0 x_{ci} + y_0 y_{ci} + z_0 z_{ci} \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)并把 x_0, y_0 和 z_0 看作未知数, 整理得

$$(A_{1i} x_c + A_{12} y_c + A_{13} z_c) x_0 + (A_{14} x_c + A_{15} y_c + A_{16} z_c) y_0 + (A_{17} x_c + A_{18} y_c + A_{19} z_c) z_0 = 0 \quad (i = 2, 3, 4) \quad (11)$$

$$\text{其中 } \begin{aligned} A_{1i} &= C_{11i} - 1 & A_{12} &= C_{12i} & A_{13} &= C_{13i} & A_{14} &= C_{21i} \\ A_{15} &= C_{22i} - 1 & A_{16} &= C_{23i} & A_{17} &= C_{13i} & A_{18} &= C_{32i} \\ A_{19} &= C_{33i} - 1 \end{aligned}$$

令

$$D_i = A_{1i} x_c + A_{12} y_c + A_{13} z_c \quad E_i = A_{14} x_c + A_{15} y_c + A_{16} z_c$$

$$F_i = A_{17} x_c + A_{18} y_c + A_{19} z_c \quad (i = 2, 3, 4)$$

则式(11)变为

$$D_i x_0 + E_i y_0 + F_i z_0 = 0 \quad (i = 2, 3, 4) \quad (12)$$

使式(12)齐次线性方程组有非零解, 其系数矩阵的行列式的值必须为零, 即

$$\begin{vmatrix} D_2 & E_2 & F_2 \\ D_3 & E_3 & F_3 \\ D_4 & E_4 & F_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

将式(13)展开, 整理得

$$H_1 x_c^3 + H_2 y_c^3 + H_3 z_c^3 + H_4 x_c^2 y_c + H_5 x_c^2 z_c + H_6 x_c y_c^2 + H_7 x_c z_c^2 + H_8 y_c^2 z_c + H_9 y_c z_c^2 + H_{10} x_c y_c z_c = 0 \quad (14)$$

其中

$$H_1 = |A_{21} A_{34} A_{47}|$$

$$H_2 = |A_{22} A_{35} A_{48}| \quad H_3 = |A_{23} A_{36} A_{49}|$$

$$H_4 = |A_{21} A_{34} A_{48}| + |A_{21} A_{35} A_{47}| + |A_{22} A_{34} A_{47}|$$

$$H_5 = |A_{21} A_{34} A_{49}| + |A_{21} A_{36} A_{47}| + |A_{23} A_{34} A_{47}|$$

$$H_6 = |A_{21} A_{35} A_{48}| + |A_{22} A_{34} A_{48}| + |A_{22} A_{35} A_{47}|$$

$$H_7 = |A_{21} A_{36} A_{49}| + |A_{23} A_{34} A_{49}| + |A_{23} A_{36} A_{47}|$$

$$H_8 = |A_{22} A_{35} A_{49}| + |A_{22} A_{36} A_{48}| + |A_{23} A_{35} A_{48}|$$

$$H_9 = |A_{22} A_{36} A_{49}| + |A_{23} A_{35} A_{49}| + |A_{23} A_{36} A_{48}|$$

$$H_{10} = |A_{21}A_{35}A_{49}| + |A_{21}A_{36}A_{48}| + |A_{22}A_{34}A_{49}| + |A_{22}A_{36}A_{47}| + |A_{23}A_{34}A_{48}| + |A_{23}A_{35}A_{47}|$$

为简化书写,上式中只写出对角线上的元素,例如用

$$|A_{21}A_{34}A_{47}| \text{ 表示行列式 } \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} & A_{27} \\ A_{31} & A_{34} & A_{37} \\ A_{41} & A_{44} & A_{47} \end{vmatrix}。$$

由于圆点 (x_c, y_c, z_c) 必在球面上,因此还必须满足

$$x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 = 1 \tag{15}$$

联立式(14)、(15),即得到球面布尔梅斯特圆点曲线的方程式

$$\begin{cases} H_1x_c^3 + H_2y_c^3 + H_3z_c^3 + H_4x_c^2y_c + H_5x_c^2z_c + H_6x_cy_c^2 + \\ \quad H_7x_cz_c^2 + H_8y_c^2z_c + H_9y_cz_c^2 + H_{10}x_cy_cz_c = 0 \\ x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 = 1 \end{cases} \tag{16}$$

2.2 布氏点的计算及分类

在得到了球面圆点曲线的方程式以后,需要求解该方程以得到球面圆点的坐标 (x_c, y_c, z_c) 及圆心点坐标 (x_0, y_0, z_0) 。

将 $x_c = \cos\beta_c \cos\alpha_c, y_c = \cos\beta_c \sin\alpha_c$ 及 $z_c = \sin\beta_c$ 代入式(16),已知式(16)中的第2式自动满足,因此可得以球坐标 α_c, β_c 表示的球面圆点曲线的方程

$$\begin{aligned} &H_1 \cos^3\beta_c \cos^3\alpha_c + H_2 \cos^3\beta_c \sin^3\alpha_c + H_3 \sin^3\beta_c + \\ &H_4 \cos^3\beta_c \cos^2\alpha_c \sin\alpha_c + H_5 \cos^2\beta_c \cos^2\alpha_c \sin\beta_c + \\ &H_6 \cos^3\beta_c \sin^2\alpha_c \cos\alpha_c + H_7 \sin^2\beta_c \cos\alpha_c \cos\beta_c + \\ &H_8 \cos^2\beta_c \sin^2\alpha_c \sin\beta_c + H_9 \sin^2\beta_c \sin\alpha_c \cos\beta_c + \\ &H_{10} \cos^2\beta_c \cos\alpha_c \sin\alpha_c \sin\beta_c = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

由文献[10~11]知 α_c 可取 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 内的任意值,因此可以把 α_c 作为已知量,把 β_c 作为未知量,则式(17)可以写为

$$\begin{aligned} &N_1 \cos^3\beta_c + N_2 \sin^3\beta_c + N_3 \sin\beta_c \cos^2\beta_c + \\ &N_4 \cos\beta_c \sin^2\beta_c = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} N_1 &= H_1 \cos^3\alpha_c + H_2 \sin^3\alpha_c + H_4 \cos^2\alpha_c \sin\alpha_c + \\ &H_6 \sin^2\alpha_c \cos\alpha_c \\ N_2 &= H_3 \\ N_3 &= H_5 \cos^2\alpha_c + H_8 \sin^2\alpha_c + H_{10} \cos\alpha_c \sin\alpha_c \\ N_4 &= H_7 \cos\alpha_c + H_9 \sin\alpha_c \end{aligned}$$

式(18)两边同除以 $\cos^3\beta_c$,得

$$N_2 \tan^3\beta_c + N_4 \tan^2\beta_c + N_3 \tan\beta_c + N_1 = 0 \tag{19}$$

对于一个确定的 α_c ,可计算出 N_1, N_2, N_3 和 N_4 ,因此式(19)为关于 $\tan\beta_c$ 的一元三次方程,由此可求出 $\beta_c (-\pi/2 < \beta \leq \pi/2)$,即得到球面圆点坐标 (α_c, β_c) 。求出圆点坐标之后,将 $x_c = \cos\beta_c \cos\alpha_c,$

$y_c = \cos\beta_c \sin\alpha_c$ 和 $z_c = \sin\beta_c$ 代入式(12),并考虑到圆心点也必须位于球面上,即满足

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \tag{20}$$

则联立式(12)和式(20)可求出与球面圆点相对应的球面圆心点坐标 (x_0, y_0, z_0) ,写为球坐标为 (α_0, β_0) 。连接圆心点与固定铰链点 O_A 可得一个连架杆(主动杆),连接对应的圆点与固定铰链点 O_B 可得另一连架杆(从动杆),则可综合出一个球面四杆机构,因此每个机构解可用球面圆点曲线上的一个点来表示,即可用 α_c 来表示。但由于式(19)为一元三次方程,计算得到的 β_c 可能有1个、2个(含二重根)或3个,因此 α_c 与机构解并不是一一对应的,一个 α_c 可能对应着1个、2个或3个机构。为了建立机构解域,对式(19)计算所得 β_c 的值进行探讨,根据一元三次方程实根的特点对计算所得球面圆点坐标进行分类。

令 $\tan\beta_c = k - N_4/(3N_2)$,代入式(19)整理可得缺项的一元三次方程

$$k^3 + pk + q = 0 \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} p &= \frac{N_3}{N_2} - \frac{N_4^2}{3N_2^2} \\ q &= \frac{2N_4^3}{27N_2^3} + \frac{N_1}{N_2} - \frac{N_3N_4}{3N_2^2} \end{aligned}$$

令 $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$,由Cardano公式得知,式(21)的一元三次方程的实根为:

当 $D > 0$ 时,有一个实根和一对共轭复根, $k_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D}}$ 为实根, k_2, k_3 为一对共轭复根。

当 $D = 0$ 时,有3个实根且有2个实根相等

$$k_1 = -\sqrt[3]{4q} \quad k_2 = k_3 = \sqrt[3]{q/2}$$

当 $D < 0$ 时,有3个不相等实根

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\sqrt{-p/3} \cos(\gamma/3) \\ k_2 &= -\sqrt{-p/3} [\cos(\gamma/3) + \sqrt{3} \sin(\gamma/3)] \\ k_3 &= -\sqrt{-p/3} [\cos(\gamma/3) - \sqrt{3} \sin(\gamma/3)] \end{aligned}$$

其中

$$\gamma = \arctan(-2\sqrt{-D/q})$$

取一定步长 $\Delta\alpha_c$,令 α_c 在 $[-180^\circ, 180^\circ]$ 内连续取值,解方程式(21),并由 $\tan\beta_c = k - N_4/(3N_2)$ 得到 β_c 的值,从而求得球面圆点坐标 (α_c, β_c) 。将由 k_1 计算得到的圆点编为第1组,由 k_2 计算得到的圆点编为第2组,由 k_3 计算得到的圆点编为第3组。通过具体的示例来阐述机构类型解域的建立。

3 综合示例

给定两连架杆的4组对应角位移为 (φ_i, ψ_i) ($i = 1, 2, 3, 4$): $(5.0^\circ, 8.0^\circ), (34.0^\circ, 18.0^\circ),$

$(79.0^{\circ}, 37.0^{\circ}), (123.0^{\circ}, 59.0^{\circ})$ 。取机架长度 $\gamma_4 = 40^{\circ}$,建立如图 4 所示坐标系,根据相对运动转换法,计算转换后连杆点的坐标及方位角,如表 1 所示。

表 1 转换后的四位置参数

Tab.1 Four position parameters of inverted coupler

位置 i	经度 $\alpha_i/(^{\circ})$	纬度 $\beta_i/(^{\circ})$	方位角 $\theta_i/(^{\circ})$
1	40.000 0	0	8.000 0
2	36.274 7	-18.157 5	-5.007 3
3	13.022 8	-38.162 0	-32.478 1
4	-21.501 1	-34.579 4	-65.764 4

对于表 1 给定的转换后的 4 个位置参数,可用四位置综合方法得到类似于式(17)的球面布氏曲线的方程式。取步长 $\Delta\alpha_c = 1^{\circ}$,令 α_c 在 $[-180^{\circ}, 180^{\circ}]$ 内连续取值,即可计算得到球面圆点 (α_c, β_c) 和与之对应的圆心点 (α_0, β_0) 。图 7 给出了计算得到的球面布氏曲线。

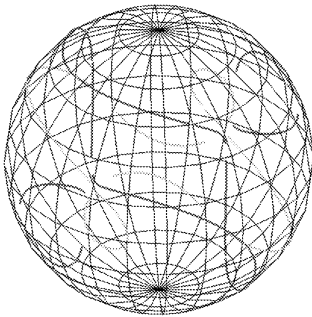


图 7 球面布氏曲线
Fig.7 Spherical Burmester curves

在球面布氏曲线上任取一组点可得到一个连架杆,两个连架杆组成一个球面四杆机构。在位置综合中需要选取 2 个连架杆,因此类型图为一平面区域,其中每个点代表 1 个机构,该点的每个坐标代表 1 个连架杆^[11-12]。而在函数综合中,由于机架是给定的,也就是转换后的一个连架杆是已知的,只需在布氏曲线上选取一组点,得到另 1 个连架杆,然后与已知的连架杆相连即可得到 1 个球面四杆机构。因此函数综合中只需 1 个坐标就可以表示 1 个机构,圆上的点只需 1 个角度就可以确定(不考虑半径),因此可以把机构类型分布区间表示在圆上。以 α_c 为坐标,它的取值为 $[-180^{\circ}, 180^{\circ}]$,正好对应了圆的一周,且由于 α_c 为球面圆点曲线上点的经度坐标,因此能更形象地表示点所在球上的位置。由此得到如图 8 所示的机构类型分布图。其中,机构类型分类沿用平面四杆机构的分类方法,按照杆长条件分为 8 类^[13-15]。图 8 中最外面的数字代表 α_c 的取值,外圈对应着第 1 组机构,即前面由 k_i 计算出的球面圆点综合所得的机构;中间一圈对应着第 2

组机构;内圈对应着第 3 组机构。圆心 O 表示已知的连架杆,从中可以直观准确地得到综合所得全部机构的类型及分布区间。

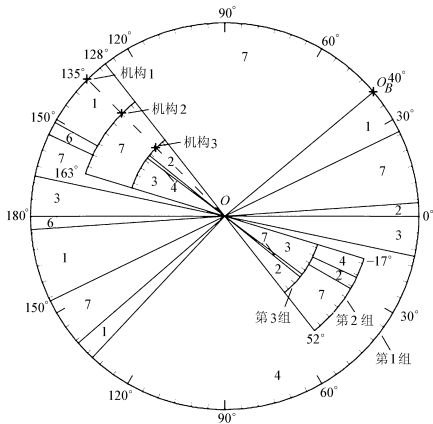


图 8 机构类型解域
Fig.8 Mechanism type map

1. 曲柄摇杆 2. 双曲柄 3. 双摇杆 4. 三摇杆(外-内摆动)
5. 摇杆曲柄 6. 三摇杆(外-外摆动) 7. 三摇杆(内-外摆动)
8. 三摇杆(内-内摆动)

由图 8 可知,在该组设计初值下,不存在摇杆曲柄机构和内-内摆动的三摇杆机构,因此在该设计初值下不能得到这 2 种机构;曲柄摇杆机构的分布区间为 $[-176^{\circ}, -154^{\circ}]$ 、 $[-139^{\circ}, -133^{\circ}]$ 、 $[26^{\circ}, 39^{\circ}]$ 和 $[128^{\circ}, 151^{\circ}]$ 。如果要选择曲柄摇杆机构,则球面圆点的经度坐标 α_c 只能在这 4 个区间内取值。另外,前 3 个区间每个 α_c 对应着 1 个机构,最后一个区间每个 α_c 对应着 3 个机构。因此在区间 $[128^{\circ}, 151^{\circ}]$ 内选取机构时,只有在外圈取值才能得到曲柄摇杆机构。以 $\alpha_c = 135^{\circ}$ 为例,由图 8 可知此角度对应着 3 个机构,在外圈选取可得到曲柄摇杆机构,在中间选取可得到内-外摆动的三摇杆机构,在内圈选取可得到双曲柄机构。设计者可按照不同的机构类型要求,对综合得到的机构进行取舍。

通过开发的球面机构综合与分析软件能精确地计算出综合所得机构的尺寸参数,并进行动态仿真。表 2 中给出了 $\alpha_c = 135^{\circ}$ 在外圈选取时对应的曲柄摇杆机构的尺寸参数,该球面机构如图 9 所示。

表 2 综合所得机构的尺寸参数

Tab.2 Dimensional parameters

类型	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
曲柄摇杆	29.488 2	103.476 0	94.647 5	40.000 0

按照设计要求,综合所得机构应满足当主动杆以 φ_1 为起点分别转过 29° 、 74° 和 118° 时,对应的从动杆分别转过 10° 、 29° 和 51° 。表 3 给出了该机构在精确点处主从动杆转角的 4 组对应关系,可以看

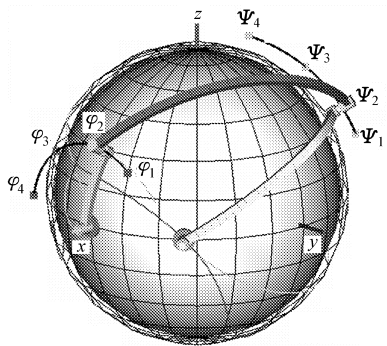


图 9 综合所得机构

Fig. 9 Synthesized spherical mechanism

出其很好地满足了设计要求。

4 结束语

研究了四精确点球面 4R 机构函数综合的问题,给出了一种不同于其他方法的基于解域的综合

表 3 精确点处转角的对应关系

Tab.3 Corner relationships for four precision points

(°)

i	φ_i	$\Delta\varphi_{1i}$	ψ_i	$\Delta\psi_{1i}$
1	53. 150 8	0	21. 691 5	0
2	82. 150 8	29	31. 691 5	10
3	127. 150 8	74	50. 691 5	29
4	171. 150 8	118	72. 691 5	51

方法。建立了机构类型解域及性能曲线。从解域图中可以直观准确地得到综合所得机构的类型及分布区间,从而使设计者有针对性地选择球面圆点和圆心点,避免了机构选取的盲目性。计算过程及图形显示通过开发的软件来实现,所得的结果表明上述推导的公式是正确的。该方法是一种利用现代计算手段解决传统函数综合问题的具有实际应用价值的有效方法。

参 考 文 献

1 Chiang C H. Synthesis of spherical four-bar function generators by means of three relative poles[J]. Mechanism and Machine Theory, 1976, 11(4): 285 ~ 294.

2 Chiang C H. Design of spherical and planar crank-rockers and double-rockers as function generators—I crank rockers[J]. Mechanism and Machine Theory, 1986, 21(4): 287 ~ 296.

3 Chiang C H. Design of spherical and planar crank-rockers and double-rockers as function generators—II double-rockers[J]. Mechanism and Machine Theory, 1986, 21(4): 297 ~ 305.

4 Chiang C H. Kinematics of spherical mechanisms[M]. New York: Cambridge University Press, 1988.

5 Cervantes-Sánchez J J, Medellín-Castillo H I. Some improvements on the exact kinematic synthesis of spherical 4R function generators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 103 ~ 121.

6 Cervantes-Sánchez J J, Luis Gracia. A novel and efficient kinematic synthesis approach of the spherical 4R function generator for five and six precision points[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(11): 2 020 ~ 2 037.

7 Rasim I Alizade, Özgür Kilit. Analytical synthesis of function generating spherical four-bar mechanism for the five precision points[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(7): 863 ~ 878.

8 王德伦,王淑芬,张保印. 球面四杆机构近似函数综合的自适应方法[J]. 机械工程学报, 2004, 40(2): 45 ~ 49. Wang Delun, Wang Shufen, Zhang Baoyin. New approach to function synthesis of spherical mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(2): 45 ~ 49. (in Chinese)

9 褚金奎,孙建伟. 球面四杆机构函数综合的傅里叶级数法[J]. 机械科学与技术, 2008, 27(7): 848 ~ 852. Chu Jinkui, Sun Jianwei. A Fourier method for function synthesis of spherical mechanisms[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2008, 27(7): 848 ~ 852. (in Chinese)

10 Michael Mccarthy J. Geometric design of linkages[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

11 Ruth D A, Michael Mccarthy J. The design of spherical 4R linkages for four specified orientations[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(5): 677 ~ 692.

12 Andrew P Murray, Michael Mccarthy J. A linkage type map for spherical 4 position synthesis[C] // ASME Design Engineering Technical Conferences, 1995, 1: 833 ~ 838.

13 Barker C A. Complete classification of planar four-bar linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 1985, 20(6): 535 ~ 554.

14 Kurt Luck, Karl-Heinz Modler. Getriebetechnik analyse-synthese-optimierung[M]. Berlin: Akademie-Verlag, 1990.

15 李剑锋. 球面四杆机构的空问模型及尺寸型[J]. 机械工程学报, 1995, 31(2): 45 ~ 50. Li Jianfeng. Space models and dimensional types of spherical four-bar linkages[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1995, 31(2): 45 ~ 50. (in Chinese)