

齿轮传动系统轮齿啮合过程动载荷谱研究*

李威 刘宁 李宁 郑璐晗

(北京科技大学机械工程学院, 北京 100083)

【摘要】建立了齿轮系统轮齿啮合过程动力学分析模型,推导了综合考虑时变啮合刚度、齿面磨损、齿形误差和安装误差的齿轮动态微分方程,提出了齿轮传动系统动载荷谱的分析方法,研究了齿轮系统载荷谱的时域特性、频域特性和时频特性,并将数值仿真结果与实验结果进行比较,结果表明:该数值仿真模型和实验结果相吻合。

关键词: 齿轮传动系统 动力学 啮合过程 载荷谱

中图分类号: TH132.413 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2012)08-0221-05

Dynamic Load Spectrum of Tooth Meshing Process for Gear Transmission System

Li Wei Liu Ning Li Ning Zheng Luhan

(School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract

The dynamic model of tooth meshing process for gear transmission system was proposed. The vibration differential equation by considering time-varying mesh stiffness, tooth face wear and errors was set up. The analysis method of dynamic load spectrum in gear transmission system was studied. The time domain, frequency domain and time-frequency domains of vibration characteristic were analyzed. These results were compared with numerical simulation and experimental results. It is shown that the proposed method consists with the numerical simulation and experimental method.

Key words Gear transmission system, Dynamics, Meshing process, Load spectrum

引言

齿轮传动广泛应用于各种机械产品中^[1],其性能和质量直接影响到整机产品的技术经济指标^[2-5]。齿轮的动载荷和固有频率直接影响到齿轮传动过程的动态性能,工作时为防止系统共振的发生,应使齿轮工作频率远离固有频率^[6-9],因此,为了避免系统工作时发生共振和出现有害振型,需要对齿轮传动系统进行动载荷谱分析,找出齿轮的薄弱环节。以往齿轮动力学模型研究中均忽略了齿轮表面客观存在的摩擦磨损,且齿轮制造及安装误差等内部激励对动特性的影响也缺乏研究^[10-12],使所求结果与实际情况有一定的偏

差。本文推导齿轮系统轮齿啮合过程的动力学方程,研究齿轮传动系统动载荷谱分析方法,得到齿轮系统的时域分布、频域分布和时频分布,揭示齿轮系统的动态行为,为齿轮的结构设计和动态优化提供依据。

1 轮齿啮合过程的动力学分析模型

在啮合线上将一对直齿圆柱齿轮传动等效为质量-弹簧模型,如图1所示,图中 r_1 、 r_2 、 m_1 、 m_2 分别为主、从动轮的基圆半径和等效质量, c_{xi} 、 c_{yi} 、 k_{xi} 、 k_{yi} 分别为轮齿的阻尼和刚度, J_i 为转动惯量, $i=1,2$, $i=1$ 为主动轮, $i=2$ 为从动轮。综合考虑了微量磨损后,齿轮传动系统的动力学模型为

收稿日期: 2011-10-17 修回日期: 2011-11-06

* 国家自然科学基金资助项目(50575021)和北京科技大学冶金研究基金资助项目(YJ2010-007)

作者简介: 李威,教授,博士生导师,主要从事现代机械设计理论及方法研究,E-mail: liwei@me.ustb.edu.cn

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i + c_{xi} \dot{x}_i + k_{xi} x_i = F_{xi} + W_{xi} + F_f \\ m_i \ddot{y}_i + c_{yi} \dot{y}_i + k_{yi} y_i = W_{yi} - F_{yi} + F_1 \\ J_i \ddot{\theta}_i + c_m \dot{\theta}_i + k_m \theta_i = \eta [W_{yi} - \\ F_{yi} + F_1 - (F_{xi} + W_{xi} + F_f)] r_i \end{cases} \quad (1)$$

式中 F_{xi} 、 F_{yi} ——振动位移产生的惯性力
 W_{xi} 、 W_{yi} ——离心惯性力
 F_1 ——齿面载荷
 F_f ——齿面间的摩擦力
 c_m ——齿轮副综合阻尼
 k_m ——齿轮副综合刚度
 θ_1 、 θ_2 ——两齿轮的角位移
 $\eta = 1$ 为主动轮, $\eta = -1$ 为从动轮。

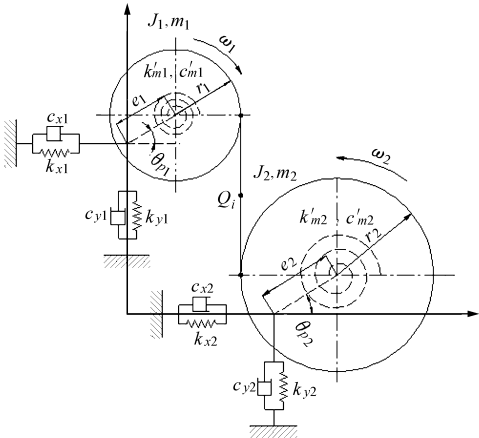


图1 齿轮传动系统动力学模型
Fig.1 Dynamic model of gear transmission system

由于两个齿轮的齿面载荷即齿轮啮合力是一对作用在节点上的等值反向力,故只需求得主动轮的载荷谱即可。对方程进行整理,得出所有力、力矩参数,齿轮1的齿面载荷和两齿轮齿面间的摩擦力为

$$\begin{cases} F_1 = F_k + F_c \\ F_f = \zeta f (F_k + F_c) \end{cases} \quad (2)$$

式中 ζ ——齿轮摩擦方向系数, F_f 沿 x 正方向取1,沿 x 负方向取-1
 f ——摩擦因数

轮齿间的弹性啮合力为

$$F_k = k_m [y_1 - e_1 \sin \theta_1 - r_1 \theta_1 - (y_2 - e_2 \sin \theta_2 - r_2 \theta_2)] - \sum_{i=1}^k \sum_{\lambda=1}^2 (e_{\lambda}(Q_i) + d_{\lambda}(Q_i) + h_{\lambda}^N(Q_i)) \quad (3)$$

式中 e_1 、 e_2 ——两齿轮质量偏心量
 λ ——齿轮编号, $\lambda = 1$ 为主动轮, $\lambda = 2$ 为从动轮
 Q_i ——接触线上的第 i 个点
 $e_{\lambda}(Q_i)$ ——轮齿误差
 $d_{\lambda}(Q_i)$ ——安装误差

$h_{\lambda}^N(Q_i)$ —— N 次循环后两齿轮齿面磨损量
两齿轮轮齿间的粘性啮合力为

$$F_c = c_m \left[\frac{d(y_1 - e_1 \sin \theta_1 + r_1 \theta_1)}{dt} - \frac{d(y_2 - e_2 \sin \theta_2 + r_2 \theta_2)}{dt} \right] - \frac{d \left[\sum_{i=1}^k \sum_{\lambda=1}^2 (e_{\lambda}(Q_i) + d_{\lambda}(Q_i) + h_{\lambda}^N(Q_i)) \right]}{dt} \quad (4)$$

齿轮在旋转过程中将产生离心力,主、从动齿轮在 x 、 y 方向上的离心惯性力分别为

$$\begin{cases} W_{xi} = m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \cos \theta_i \\ W_{yi} = m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \sin \theta_i \end{cases} \quad (5)$$

振动位移产生的惯性力为

$$\begin{cases} F_{xi} = m_i e_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i \\ F_{yi} = m_i e_i \ddot{\theta}_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (6)$$

将式(2)~(6)代入式(1)后的振动微分方程为

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i + c_{xi} \dot{x}_i + k_{xi} x_i &= m_i e_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i + m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \cos \theta_i + \zeta f (F_k + F_c) \\ m_i \ddot{y}_i + c_{yi} \dot{y}_i + k_{yi} y_i &= m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \sin \theta_i - m_i e_i \ddot{\theta}_i \sin \theta_i + (F_k + F_c) \\ J_i \ddot{\theta}_i + c_m \dot{\theta}_i + k_m \theta_i &= \eta [m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \sin \theta_i - m_i e_i \ddot{\theta}_i \sin \theta_i + F_k + F_c] - \\ &[m_i e_i \ddot{\theta}_i \cos \theta_i + m_i e_i (d(\dot{\theta}_i - \theta_i)/dt + \omega_i)^2 \cos \theta_i + \zeta f (F_k + F_c)] r_i \} \end{aligned} \quad (7)$$

2 齿轮啮合刚度

在齿轮副的连续运转过程中,随着单齿对啮合和双齿对啮合的交替进行,轮齿的啮合刚度会随时间周期性变化^[13]。且在不同的啮合位置,每一对啮合轮齿的啮合刚度也不相同。一般时变啮合刚度由平均啮合刚度和变刚度两部分组成,即

$$k_m = \bar{k} + k_a \cos(\omega_e t + \varphi_r) \quad (8)$$

其中 $\omega_e = \pi z_1 n_1 / 30 = \pi z_2 n_2 / 30$

式中 k_a ——变刚度幅值
 ω_e ——齿轮幅的啮合圆周频率
 n_i ——齿轮转速 z_i ——齿轮齿数
 φ_r ——变刚度初相位,一般取 $\varphi_r = 0$

令 $k(t)$ 为随时间变化的时变啮合刚度,即

$$k(t) = k_m / \bar{k} = 1 + \varepsilon \cos(\omega_e t + \varphi_r) \quad (9)$$

其中 $\varepsilon = k_a / \bar{k}$

本文采用有限元法来计算齿轮轮齿的弹性变形。

3 齿轮啮入与啮出冲击的计算

即使一对理论上无误差的齿轮传动，也会产生啮入、啮出冲击，这是因为产生啮入、啮出冲击的原因主要是由于相啮合轮齿之间受载变形后，导致主、从动齿轮的节距不相等，从而引起线外啮合而产生的。因此，需要利用有限元法计算轮齿在进入啮合和退出啮合的瞬间轮齿的受载变形，并与理想啮合状态进行比较，求出其差值作为误差的输入，并将其考虑到动力学模型方程(3)中的 $e_A(Q_i)$ 误差项里。

4 动力学方程的数值解法

采用 Gear 方法求解动力学方程组，它是一个自适应变步长的数值求解方法，可以自动地选择步长和相应的变阶，从而达到优化欧拉方法的目的。它每前进一个步长求解隐式方程组所需要的计算工作量比较小，不仅可以求解一般的常微分方程初值问题，而且对刚性常微分方程的数值求解也有很好的效果，因而采用 Gear 方法求解复杂非线性振动微分方程组是较有效的。设有二阶微分方程

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = g(t, \dot{x}) \\ \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{10}$$

作如下定义

$$t_i = t_0 + ih \tag{11}$$

$$x_i = x(t_i) \tag{12}$$

$$f_i = f(t_i, x(t_i)) \tag{13}$$

$$g_i = g(t_i, \dot{x}(t_i)) \tag{14}$$

式中 h ——求解的迭代步长

则求其数值解的 k 步迭代格式一般表达形式为

$$\begin{cases} x_n = hg_k f_n - \sum_{i=1}^k \varepsilon_{k,i} x_{n-i} \\ \dot{x}_n = f_i = f(t_i, x(t_i)) \\ \ddot{x}_n = g_i = g(t_i, \dot{x}(t_i)) \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\varepsilon_{k,i} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{k,i}}{\tilde{\varepsilon}_{k,0}} \quad g_k = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{k,0}}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k,i} = h \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} \right)_{t=t_n} = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} & (i=0) \\ (-1)^k \frac{1}{k} - (-1)^i \frac{1}{i} & (i>0) \end{cases} \tag{16}$$

根据多元函数导数的定义得

$$g_i = g(t_i, \dot{x}(t_i)) = \frac{df_i}{dt} = f'_{i1} + \frac{dx(t_0 + ih)}{dt} f'_{i2} \tag{17}$$

式中 $f'_{i1}、f'_{i2}$ ——函数 $f_i(u, v)$ 的一阶偏导数
则齿轮系统动力学方程组的数值解法可表示为

$$\begin{cases} x_n = hg_k f_n - \sum_{i=1}^k \varepsilon_{k,i} x_{n-i} \\ \dot{x}_n = f_i = f(t_i, x(t_i)) \\ \ddot{x}_n = g_i = f'_{i1} + \frac{dx(t_i)}{dt} f'_{i2} \end{cases} \tag{18}$$

在齿轮动力学模型中， $x_n、\dot{x}_n、\ddot{x}_n$ 分别为振动的位移、速度和加速度。

5 齿轮系统的载荷谱

以标准渐开线直齿圆柱齿轮为例，其参数为：模数 $m = 5 \text{ mm}$ ，齿数 $z = 30$ ，压力角 $\alpha = 20^\circ$ ，齿宽 $b = 14 \text{ mm}$ ，传递的扭矩 $T = 1\,350 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，角速度 $\omega = 31.4 \text{ rad/s}$ ，平均啮合刚度 $k_m = 2.115 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ，通过上述数值解法获得了齿轮传动系统轮齿啮合过程的载荷谱，并分析了其时域、频域和时频域响应。

5.1 载荷谱的时域分析

齿轮系统载荷谱的时域分布如图 2 所示。从图中可以清楚地看到单齿啮合区与双齿啮合区，以及轮齿啮合过程中任意瞬时的动载荷变化情况。

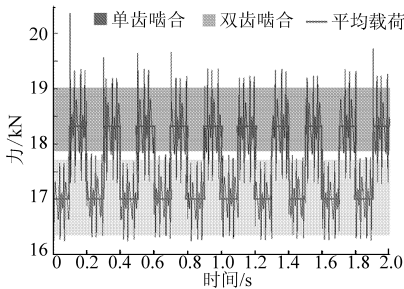


图 2 齿轮系统载荷谱的时域分布

Fig. 2 Time domain distribution of load spectrum of gear transmission system

5.2 载荷谱的频域分析

对齿轮系统载荷谱的时域分布进行快速傅里叶变换(FFT)可以得到两对啮合齿轮系统的载荷频谱，如图 3 所示。从图中可以看出，齿轮的频谱较为均匀，各频段区分明显，谱线表示的力为变载荷的幅值，载荷振幅最大的频率在 $0.4 \sim 1.41 \text{ kHz}$ 之间，齿

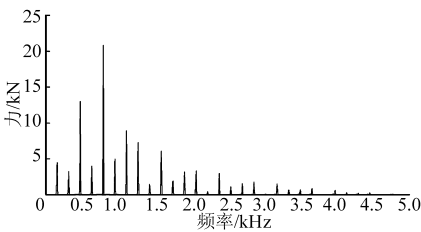


图 3 齿轮系统载荷谱的频域分布

Fig. 3 Frequency domain distribution of load spectrum of gear transmission system

轮传动系统的工作环境应避免此频段,防止系统工作时发生共振。

为了验证本文理论分析模型和数值仿真结果,在实验室进行了台架实验,由于齿轮运转过程中可以将整个运行速度区间分成亚临界区、共振区和超临界区,在亚临界区的 1/2、1/3、1/4、1/5 倍固有频率处可能会出现分频共振现象^[4],即位移、动载荷及噪声会随着转速(频率)的增加而增大,在分频共振处达到最大值,接着会随着速度的增加而减小,从图 3 中也可以看出,除了固有频率外,还有很多分频共振频率。因此,正是基于这一特点,由于实验台的速度所限,只测试获得了第一个 1/5 分频共振频率(即将实验台的转速由低到高逐渐增加,查看出现最大振动时刻的转速及相应的频率),3 次实验测试结果分别为 156.2、154.8 和 157.9 Hz,数值仿真结果为 159.6 Hz,由此可见,实验测试结果与数值仿真结果基本一致,验证了本文所建模型与理论计算的正确性。

5.3 载荷谱的时频分析

无论时域分析还是频域分析的对象都是信号。信号一般是以时间为自变量来表示的,传统的信号分析方法是通过对傅里叶变换,信号也可以分解为不同频率分量之和的形式,即以频率为自变量来表示。但传统的傅里叶变换的缺点在于它是一个整体的变换,即信号要么完全在时域,要么完全在频域,无法得到频谱随时间的变化情况。为解决这一矛盾,本文用时间与频率的联合函数来表示信号,将前面所求得的载荷谱采用短时傅里叶变换(STFT)和伪 Margenau-Hill(PMHD)分布两种方法进行时频变换,得到齿轮系统载荷谱的时频分布。图 4 为伪 Margenau-Hill 处理的齿轮载荷谱时频分布,图 5 为短时傅里叶变换处理的齿轮载荷谱时频分布。

通过两种时频分析方法的对比可以明确地看出,两者得出结果基本一致,但分辨率有明显差距。短时傅里叶变换得到的分辨率要显著低于伪 Margenau-Hill 处理,但计算过程时间较短。在实际应用中应根据数据量、响应速度的要求以及硬件水平的情况加以权衡。

6 结论

(1)提出了齿轮传动系统动载荷谱的分析方

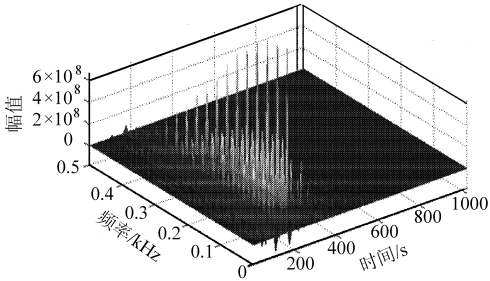


图 4 采用伪 Margenau-Hill 处理的齿轮系统
载荷谱的时频分布
Fig.4 Time-frequency domain distribution of load spectrum
of gear transmission system on the basis of PMHD model

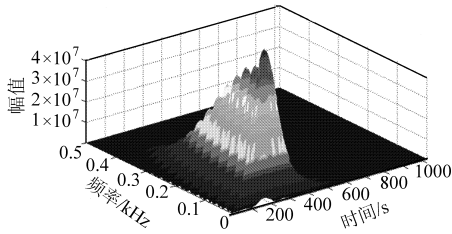


图 5 采用短时傅里叶变换处理的齿轮系统
载荷谱的时频分布
Fig.5 Time-frequency domain distribution of load spectrum
of gear transmission system on the basis of STFT model

法,将齿轮的磨损、加工误差和安装误差等效为啮合线上的基节误差,建立了齿轮系统基于轮齿啮合过程的动力学分析模型,该模型能够真实地反映出齿轮啮合过程中轮齿受载状况,研究了齿轮系统动载荷谱的时域特性、频域特性和时频特性。

(2)通过齿轮载荷谱的时域分析,可以获得轮齿啮合过程中单、双齿啮合区任一瞬时的动载荷,从而可以作为输入用于考虑动载荷情况下的齿轮油膜厚度、接触强度、弯曲强度和齿面温度的精确计算。在齿轮载荷谱的频域分析中,可以直观地确定齿轮的各阶固有频率并发现薄弱环节,从而可以避免系统工作时发生共振和出现有害振型。

(3)采用短时傅里叶变换与伪 Margenau-Hill 分布两种方法进行载荷谱的时频转换,得到了齿轮系统载荷谱的时域-频域联合分布,两种不同时频分析方法所得结果基本一致,但分辨率不同,伪 Margenau-Hill 分布方法的分辨率较高,比较适宜齿轮传动系统的动载荷谱分析。

参 考 文 献

1 Roland Mathis, Yves Remond. Kinematic and dynamic simulation of epicyclic gear trains[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(2):412~424.
2 Vedmar L, Andersson A. A method to determine dynamic loads on spur gear teeth and on bearings[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 267(5):1 065~1 084.

- 3 樊智敏, 张光辉. 双渐开线齿轮振动特性的试验研究[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(5): 820 ~ 823.
Fan Zhimin, Zhang Guanghui. Experimental research on the vibration characteristics of double involute gears[J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(5): 820 ~ 823. (in Chinese)
- 4 娄依志, 王小群, 李威. 非对称渐开线圆柱齿轮的动力学特性[J]. 北京科技大学学报, 2005, 27(3): 334 ~ 337.
Lou Yizhi, Wang Xiaoqun, Li Wei. Dynamics analysis of involute gears with asymmetric teeth[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2005, 27(3): 334 ~ 337. (in Chinese)
- 5 邓效忠, 徐恺, 潘十成, 等. 直廓内齿与渐开线齿轮啮合传动计算与噪声试验[J]. 农业机械学报, 2009, 40(11): 219 ~ 222.
Deng Xiaozhong, Xu Kai, Pan Shicheng, et al. Transmission error and noise experiment on meshing of the straight profiled internal gear with the involute external gear[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(11): 219 ~ 222. (in Chinese)
- 6 Khabou M T, Bouchaala N, Chaari F, et al. Study of a spur gear dynamic behavior in transient regime[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, 25(8): 3 089 ~ 3 101.
- 7 Yuksel C, Kahraman A. Dynamic tooth loads of planetary gear sets having tooth profile wear[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(7): 695 ~ 715.
- 8 Jean-Luc Dion, Sylvie Le Moine. Gear impacts and idle gear noise: experimental study and non-linear dynamic model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(8): 2 608 ~ 2 628.
- 9 Marcello Faggioni, Farhad S Samani. Dynamic optimization of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 544 ~ 557.
- 10 Andersson A, Vedmar L. A dynamic model to determine vibrations in involute helical gears[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 260(2): 195 ~ 212.
- 11 段福海, 胡青春, 谢存禧. 钢塑齿轮组行星传动的振动特性[J]. 机械工程学报, 2010, 46(1): 62 ~ 67.
Duan Fuhai, Hu Qingchun, Xie Cunxi. Dynamic behavior for planetary geared system with plastic gear[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(1): 62 ~ 67. (in Chinese)
- 12 王立华, 李润方, 林腾蛟, 等. 齿轮系统时变刚度和间隙非线性振动特性研究[J]. 中国机械工程, 2003, 14(13): 1 143 ~ 1 146.
- 13 陈奇, 赵韩, 黄康. 齿轮结合面切向接触刚度分形计算模型研究[J]. 农业机械学报, 2011, 42(2): 203 ~ 206.
Chen Qi, Zhao Han, Huang Kang. Fractal model of tangential contact stiffness between gears's joint surfaces[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(2): 203 ~ 206. (in Chinese)

(上接第 230 页)

- 7 茅健. 基于数学定义的公差建模与误差评定技术的研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2007.
Mao Jian. Study on the modeling of tolerance based on mathematical definition and for errors evaluation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (in Chinese)
- 8 张为民, 李国伟, 陈灿. 基于雅可比旋量理论的公差优化分配[J]. 农业机械学报, 2011, 42(4): 216 ~ 219, 228.
Zhang Weimin, Li Guowei, Chen Can. Optimal allocation of tolerance based on jacobian-torsor theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(4): 216 ~ 219, 228. (in Chinese)
- 9 徐旭松, 杨将新, 曹衍龙, 等. 一种面向可装配性的公差分析方法[J]. 中国机械工程, 2008, 19(24): 2 976 ~ 2 981.
Xu Xusong, Yang Jiangxin, Cao Yanlong, et al. A tolerance analysis method for feasibility of assembly[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(24): 2 976 ~ 2 981. (in Chinese)
- 10 周彤, 凌芸, 周岩. 基于一致性分析的公差传播方法[J]. 中国机械工程, 2002, 13(3): 214 ~ 217.
Zhou Tong, Ling Yun, Zhou Yan. Tolerance propagation method based on consistency analysis[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(3): 214 ~ 217. (in Chinese)
- 11 Bourdet P, Mathieu L, Lartigue C. The concept of the small displacement torsor in metrology[M] // Ciarlini P, Cox M G, Pavese E, et al. Advanced Mathematical Tools in Metrology II, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 1990: 109 ~ 121.
- 12 胡洁, 吴昭同. 面向装配的变动几何约束网络的生成方法研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(1): 79 ~ 82.
Hu Jie, Wu Zhaotong. Method for generation of variational geometric constraints networks for assembly[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(1): 79 ~ 82. (in Chinese)
- 13 赵鹏, 盛步云, 邓伟刚. 工艺设计过程中的切削体分解组合策略[J]. 计算机集成制造系统, 2010, 16(9): 1 793 ~ 1 800.
Zhao Peng, Sheng Buyun, Deng Weigang. Delta-volume decomposition and combination strategy for process planning[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2010, 16(9): 1 793 ~ 1 800. (in Chinese)