

大型双吸离心泵叶轮动应力特性^{*}

高江永¹ 王福军¹ 瞿丽霞¹ 刘竹青¹ 戚兰英²

(1. 中国农业大学水利与土木工程学院, 北京 100083; 2. 北京市水利规划设计研究院, 北京 100044)

【摘要】 基于顺序流固耦合理论,以双吸泵内部非定常流场信息作为力学边界条件,采用有限元方法,对一台大型双吸离心泵叶轮进行了瞬态动力学分析。主要考察了5个流量工况($0.6Q_d$ 、 $0.8Q_d$ 、 Q_d 、 $1.1Q_d$ 、 $1.2Q_d$)下的叶轮动应力特征。结果表明,在不同流量工况下叶轮表面动应力分布趋势基本相似,最大应力点出现在叶片进口或出口边靠近前盖板的根部区域;在小流量($0.6Q_d$)工况下,动应力水平最高;叶片动应力随时间呈周期性变化;动应力频率成分主要为叶轮转频及其谐频。

关键词: 双吸离心泵 叶轮 动应力 流固耦合 有限元法

中图分类号: TH311 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)01-0042-06

Dynamic Stress of Large Double-suction Centrifugal Pump Impeller

Gao Jiangyong¹ Wang Fujun¹ Qu Lixia¹ Liu Zhuqing¹ Qi Lanying²

(1. College of Water Conservancy and Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China

2. Beijing Institute of Water, Beijing 100044, China)

Abstract

The dynamic stress analysis for a large double-suction centrifugal pump impeller was presented by using the finite element method. This analysis was based on the sequential fluid-structure interaction theory. The pressure pulsation obtained from flow simulation by using CFD code was set as the force boundary condition. The dynamic stress characteristics of the impeller under five flow conditions ($0.6Q_d$, $0.8Q_d$, Q_d , $1.1Q_d$, $1.2Q_d$) were given. The results showed that the maximum stress of the impeller appeared at trailing edge or leading edge region of the blade near shroud. The stress distributions on impeller blade surfaces under different flow rate conditions are similar to each other. The level of dynamic stress under $0.6Q_d$ is the highest. The dynamic stress varies periodically with the impeller rotating. It is also found that the fundamental frequencies of the dynamic stress are the rotating frequency and its harmonic frequency.

Key words Double-suction pump, Impeller, Dynamic stress, Fluid structure interaction, Finite element method

引言

随着跨流域调水工程、大型灌溉排水工程及核电站工程的相继建设,大型双吸离心泵的应用越来越广泛。为了提高水泵运行稳定性,针对水泵内部不稳定流动特性的研究^[1~2]相对较多,而对于水泵过流部件的应力特性研究相对较少。应力特性的研

究对于预防疲劳破坏、提高水泵运行稳定性有重要工程意义。

传统应力计算方法是对叶轮叶片受力进行简化,采用理论公式计算获得应力值^[3]。随着计算流体力学的发展,采用CFD技术可以对作用在叶轮表面的水压力进行有效的预测,这为叶轮应力分析提供了有力的技术支持。一些学者对此进行了研

收稿日期: 2011-01-17 修回日期: 2011-02-20

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51079151、50779070)、北京市自然科学基金重点资助项目(3071002)和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(0100008110012)

作者简介: 高江永,博士生,主要从事水力机械结构动力学与疲劳可靠性研究,E-mail: gaojy0147@163.com

通讯作者: 王福军,教授,博士生导师,主要从事计算流体力学和水力机械研究,E-mail: wangfj@cau.edu.cn

究^[3-5],但这些研究大多只针对叶轮静应力分布特征和静应力是否满足强度要求进行讨论,并未对叶轮应力的动态特性作进一步研究。相对于水泵来说,在水轮机转轮应力研究中,除对静应力^[6-7]研究以外,对于转轮动应力^[8-9]研究的报道也有很多,这些研究为开展水泵结构动应力研究提供了一些依据。

本文以一台大型双吸离心泵叶轮为研究对象,基于顺序流固耦合方法,以文献[10]中该双吸离心泵内部非定常流场计算结果为主要力学边界条件,采用有限元方法对在水利压力脉动下的叶轮进行瞬态结构动力学分析,对叶轮的动应力分布,特别是叶片根部的动应力分布和时域、频域特征进行研究。

1 计算方法

采用基于顺序流固耦合方法进行叶轮动应力分析,必须要进行水泵内部非定常流场计算和水泵零件结构动力学分析。由于求解水泵内部流场的计算方法在文献[1,2,10]中均有详细描述,在本文中仅对结构动力学计算与流固耦合方法进行论述。

1.1 结构动力学方法

进行结构动力学计算,主要是求解结构动力学方程^[11],即

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_i \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{M}$ ——质量矩阵 $\mathbf{C}$ ——阻尼矩阵
 $\mathbf{K}$ ——刚度矩阵 $\mathbf{u}$ ——节点位移
 $\dot{\mathbf{u}}$ ——节点速度 $\ddot{\mathbf{u}}$ ——节点加速度
 $\mathbf{F}_s$ ——作用在叶轮表面的压力
 $\mathbf{F}_i$ ——惯性力(包括离心力和重力)
 $\boldsymbol{\sigma}$ ——节点应力 $\mathbf{D}$ ——弹性矩阵
 $\mathbf{B}$ ——应变位移矩阵

其中,阻尼矩阵 $\mathbf{C}$ 通过 Rayleigh's 理论可表示为

$$\mathbf{C} = c_K \mathbf{K} + c_M \mathbf{M} \quad (3)$$

式中 c_K, c_M ——常数,由结构模态阻尼比确定

采用 Newmark 时间积分方法^[11]对式(1)进行求解,获得节点的位移解;然后求解式(2)获得节点应力值。根据第四强度理论^[12],获得等效应力 σ_e ,计算公式为

$$\sigma_e =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)^2 + (\sigma_y + \sigma_z)^2 + (\sigma_x + \sigma_z)^2 + 6(\tau_x + \tau_y + \tau_z)^2} \quad (4)$$

式中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——节点正应力

τ_x, τ_y, τ_z ——节点切应力

1.2 流固耦合方法

在进行叶轮的结构动力学计算之前,必须要考虑流固耦合作用。处理流固耦合问题有两种策略,即强耦合方法和弱耦合方法。强耦合方法相对弱耦合方法计算精度略高,但使用强耦合方法会降低计算效率、延长计算周期,而弱耦合方法在计算精度上也可满足工程需要^[8]。因此,本文采用弱耦合方法(即顺序耦合方法),该方法忽略了结构变形对流场的影响。针对流体场和结构场网格不重合的问题,基于形函数的插值方法,建立流体场与结构场节点间映射矩阵^[13],完成节点载荷信息的传递。

2 研究对象

研究对象为国内某大型跨流域调水工程中采用的双吸离心泵,结构如图1所示。设计流量 Q_d 为 $10 \text{ m}^3/\text{s}$,设计扬程 H 为 59.2 m ,转速 n 为 375 r/min ,叶轮直径 D 为 1750 mm 。叶轮形式为交错式,出口呈“V”字形布置。

使用材料为铸造不锈钢,材料的弹性模量 E 为 210 GPa ,泊松比 ν 为 0.3 ,密度 ρ 为 7900 kg/m^3 。本文对5个流动工况($0.6Q_d$ 、 $0.8Q_d$ 、 Q_d 、 $1.1Q_d$ 、 $1.2Q_d$)下的叶轮动应力特性进行分析。

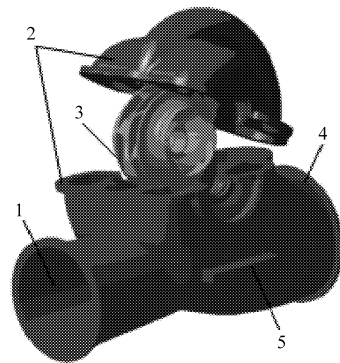


图1 双吸泵结构

Fig. 1 Structure of double-suction pump

1.出口 2.泵体 3.叶轮 4.进口 5.支座

3 网格模型与边界条件

3.1 网格模型

采用四面体网格对叶轮进行网格划分,并在叶片进口边进行局部细化。网格模型如图2所示。该模型包括109 859个单元,32 891个节点。

3.2 边界条件

考虑到叶轮实际工作情况,在叶轮的轴孔处施加全位移约束。作用在叶轮上的外力主要包括惯性力和表面力。惯性力主要有重力和离心力。表面力主要是指由不稳定流动引起的脉动压力。脉动的水压力通过水泵全流道的非定常 CFD 计算获得^[10],

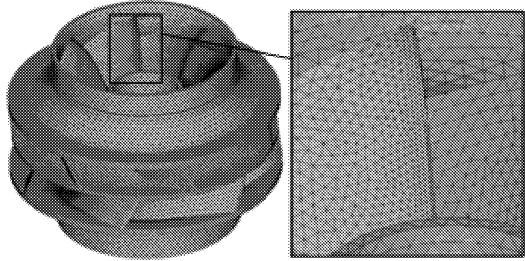


图 2 叶轮网格模型
Fig. 2 Grid model of impeller

通过流固耦合界面转化方法^[14]转换为结构节点载荷,完成外力载荷施加。

通过叶轮模态分析,可以获得叶轮前两阶固有频率^[14],依据阻尼系数与固有频率的关系^[15]可计算得到阻尼系数分别为 $c_K = 13.901$ 和 $c_M = 0.000\,061\,7$ 。计算时间 0.8 s ,即 5 个叶轮旋转周期,时间步长选择与流体场计算一致,取值为 $0.001\,6\text{ s}$ 。选择大型商用软件 ANSYS 11.0 为计算平台,进行叶轮瞬态动力学计算。

4 计算结果与分析

4.1 叶轮的应力分布特征

偏离设计工况时,水泵内部流动复杂,有必要对各个工况下的应力进行比较,以期获得对水泵运行有指导的信息。选择 $t = 0.8\text{ s}$ 时刻的计算结果进行分析,图 3 为该时刻下不同工况下的应力云图。其中左图可以清晰地看到前盖板的应力分布,右图是将前盖板去掉后,直观观察到的后盖板和叶片的应力分布。

从图 3 可以知道应力分布具有以下特征:

(1)该时刻下,叶轮最大等效应力点发生在叶片进口边根部,靠近前盖板的区域,5 个工况下最大等效应力出现区域基本一致。等效应力发生叶片进口边根部主要是由于叶片工作面和背面存在压力差,且进口边相对较宽,从而使叶片进口边根部受到的弯力矩较大,致使产生的应力较大,除此以外还受到离心力作用,因此导致在该时刻下最大应力发生在进口边靠近前盖板的根部区域。这与混流式水轮机可能发生的最大应力区域^[7-8, 16]具有相似性。

(2)5 个流动工况下叶轮的应力分布基本一致,并未出现很大差别。

(3)后盖板应力水平要低于前盖板和叶片,叶片根部应力相对中间部分较大,在叶片进出口边中间位置都存在一个小应力区。

(4)最大等效应力随流量的增加而减小。可见在小流量工况下,应力值水平较高。

从其他时刻的计算结果,还有以下特征:

(1)等效应力相对较大的位置还可能出现在前盖板与叶片出口边相交位置。

(2)应力分布随叶轮旋转呈周期性变化。所以在进行结构强度校核时,必须进行疲劳强度计算。

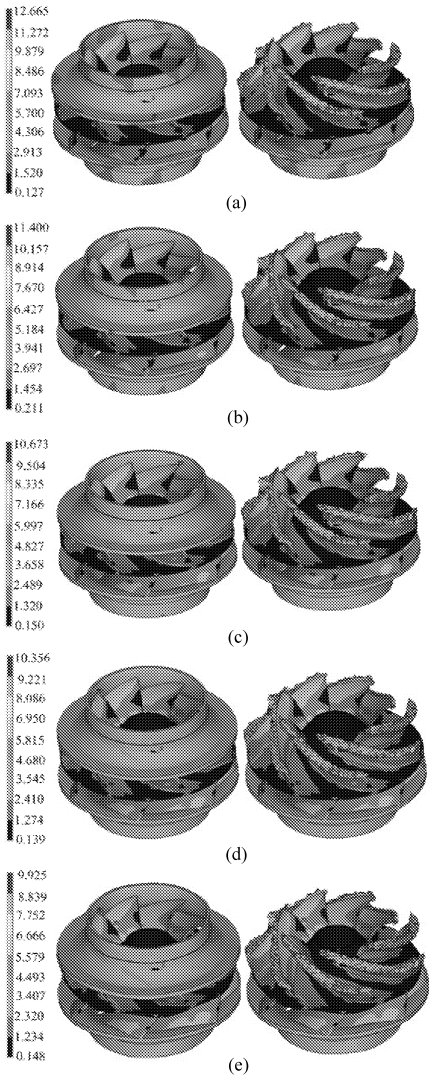


图 3 $t = 0.8\text{ s}$ 时刻不同工况下叶轮等效应力云图

Fig. 3 Contours of stress on impeller under different flow conditions at $t = 0.8\text{ s}$

(a) $0.6Q_d$ (b) $0.8Q_d$ (c) Q_d (d) $1.1Q_d$ (e) $1.2Q_d$

4.2 叶片根部应力分布

叶轮叶片所受应力主要包括:旋转时作用在叶片上的离心力所引起的拉应力,内部流场压力作用产生的弯曲应力。发生破坏往往也发生在叶片根部。

为了研究叶片根部应力分布特性以及随工况、旋转变化的情况,对叶片根部应力信息进行记录和分析。叶片与前盖板有两条交线,与工作面交线定义为 Pa ,与叶片背面的交线定义为 Sa ,同理与后盖板的交线分别定义为 Pb 和 Sb ,如图 4。在 4 条线上布置一些测点,以监测根部的应力变化特征。在每条线上均匀布置 8 个点,在叶片头部布置 1 个点,以

线 Sa 为例进行说明,监测点位置如图 5 所示。

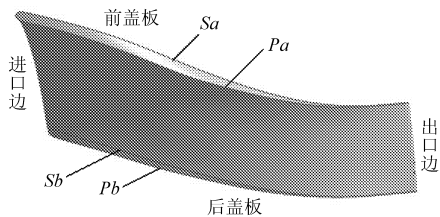


图 4 叶片根部交线定义

Fig. 4 Definition of lines intersection at blade root

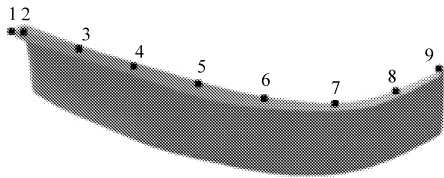


图 5 叶片根部 Sa 线上监测点分布图

Fig. 5 Locations of recording points on Sa

图 6 表示为 $t = 0.8\text{ s}$ 时,叶轮某叶片根部的应力分布情况,由图中测点应力变化曲线线可知, Sa 的应力水平较高,其次是 Pa ,而 Pb 和 Sb 二者应力水平相差不大;进口边头部靠近前盖板位置应力水平较高,靠近口盖板则应力水平较低; Sb 、 Pb 线上各有一个应力拐点,位于测点 4 处,由于叶片形状在测点 4 附近发生变化,从而造成该位置应力发生变化。在叶片设计时,叶片的合理扭曲可使叶片水力性能得以提高,但是一定程度上扭曲位置的应力存在突变,在铸造或焊接时也可能产生缺陷,运行过程中,多种因素作用有可能会造成材料的破坏,因此在叶片设计时应加以考虑。对于 Sa 上 3 和 5 点位置也同样存在该类问题。

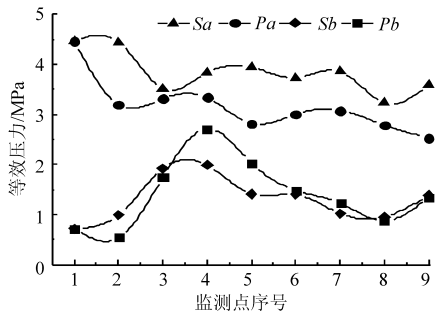


图 6 Q_d 工况下,叶片根部交线应力变化($t = 0.8\text{ s}$)

Fig. 6 Stress distribution of blade root under Q_d at $t = 0.8\text{ s}$

为了考察 Sa 线上动应力随时间的变化特征,将 Sa 线上动应力在一个旋转周期($0.64 \sim 0.8\text{ s}$)内的分布情况绘制在一张三维图上。在此仅列出 Q_d 、 $1.2Q_d$ 、 $0.6Q_d$ 工况下的变化情况,见图 7。

从图 7 可知 Sa 线上应力随时间变化的特征:

(1) Sa 上 3 和 8 点位置存在拐点,主要是由于叶片在这两个位置存在不同程度扭曲;在 3 种流量

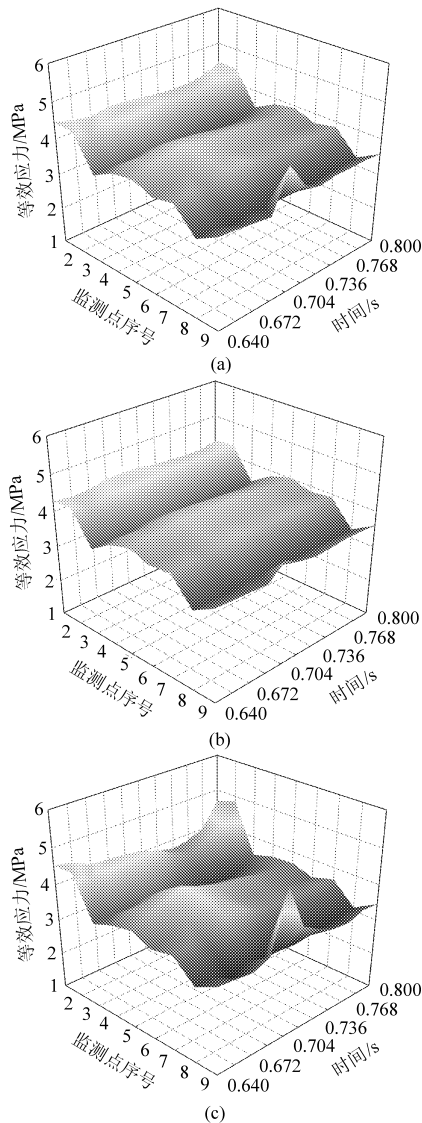


图 7 不同流量工况下叶片根部 Sa 应力变化

Fig. 7 Stress distribution on Sa under different flow conditions

(a) Q_d (b) $1.2Q_d$ (c) $0.6Q_d$

下,变化趋势基本一致,说明虽然外部水压力载荷随工况存在差异,但是应力分布趋势仍由叶片形状决定。

(2) 在大流量工况下,根部随时间的变化趋势较为平稳,应力分布较为均匀。小流量下,应力分布情况变化较大,这与在小流量下扬程以及压力脉动水平较高相吻合,所以在水泵运行时,对于小流量工况应给予注意,尽量保证水泵运行在高效区,这样不仅可以节约能源,而且也有利于运行稳定性。

(3) 假设旋转周期为 T ,那么在 $t = T/2$ 时,出口边(测点 9)存在一个较大变化,说明出口边根部应力变化幅值可能与进口边相当,在进行疲劳寿命估算时,应将出口边根部也作为关键点进行考虑。

4.3 叶片进出口边动应力时频特性

引入应力系数 C_s 作为度量应力的相对值。应力系数计算公式^[4]为

$$C_s = \Delta\sigma_e / (0.5\rho u_2^2) \tag{5}$$

式中 $\Delta\sigma_e$ ——等效应力与其均值之差,Pa
 ρ ——水的密度,kg/m³
 u_2 ——出口速度,m/s

选择叶片根部 Sa 线上的首尾两点作为研究对象,对应力的时域、频域特性进行分析。图 8 为线 Sb 上位于叶片进口边的测点 1(对应的网格节点为 388)应力系数在不同工况下随时间变化曲线,通过快速傅里叶变换,可以获得该节点处动应力的频谱图,见图 9。图 10 与图 11 分别为叶片出口边的测点 9(对应的网格节点为 4941)时间历程曲线与频谱图。

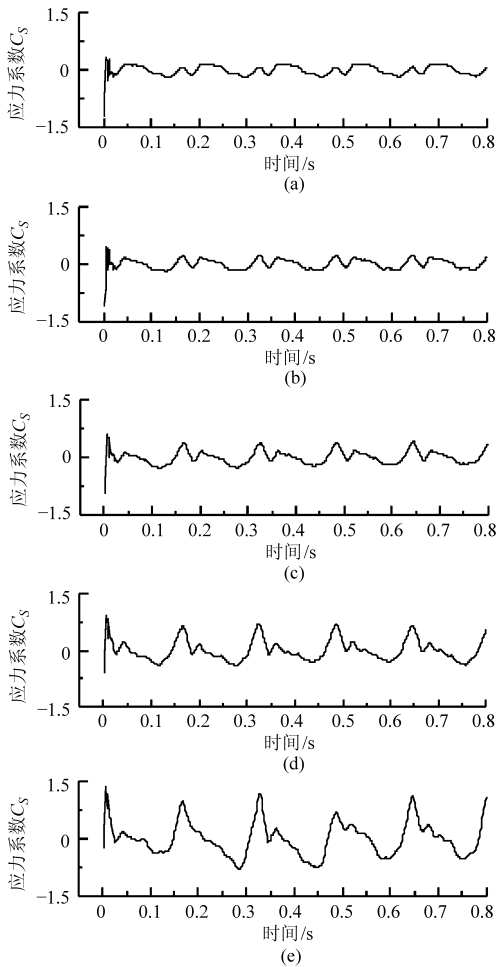


图 8 节点 388 动应力时间历程曲线

Fig. 8 Time history of dynamic stress at node 388
(a) 1.2*Q_d* (b) 1.1*Q_d* (c) *Q_d* (d) 0.8*Q_d* (e) 0.6*Q_d*

靠近前盖板的进口边根部应力具有如下特征:
(1)在不同工况下,随叶轮旋转,应力呈周期性变化,但是在 0.6*Q_d* 工况下,周期性有所减弱。
(2)随流量不断增加,应力幅值逐渐减小。0.6*Q_d* 工况下,应力系数幅值是设计工况下的 3 倍;大约是 1.2*Q_d* 工况下的 5 倍。
(3)动应力频率成分主要为转频及其谐频,转

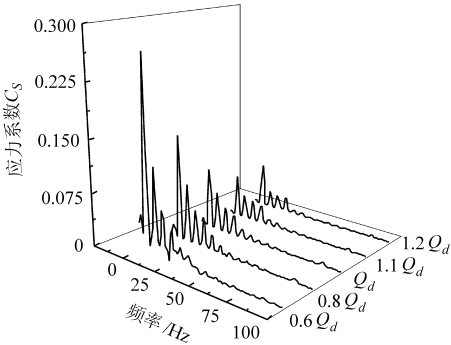


图 9 节点 388 动应力频谱图

Fig. 9 Frequency spectra of dynamic stress at node 388

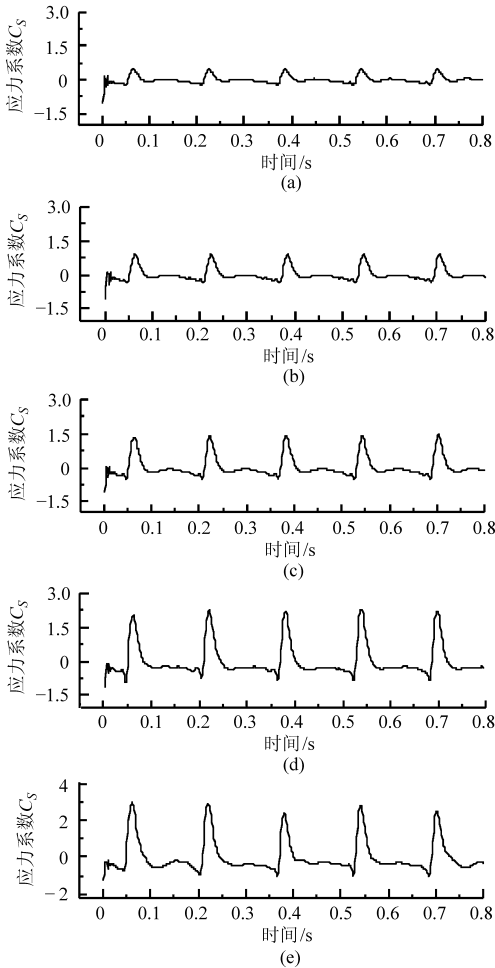


图 10 节点 4941 动应力时间历程曲线

Fig. 10 Time history of dynamic stress at node 4941
(a) 1.2*Q_d* (b) 1.1*Q_d* (c) *Q_d* (d) 0.8*Q_d* (e) 0.6*Q_d*

频为基频。
(4)第一主频始终为转频。0.6*Q_d* 工况下第一主频的幅值为设计工况下的 4 倍。
在出口边节点上应力具有以下特征:
(1)动应力随时间呈周期性变化,且随流量减小应力变化幅值逐渐增加,0.6*Q_d* 下最大应力幅值约是 1.2*Q_d* 下幅值的 5 倍。
(2)动应力的基频为转频,第一主频在各个工况下并不相同,这点与进口边有所不同,主要原因是

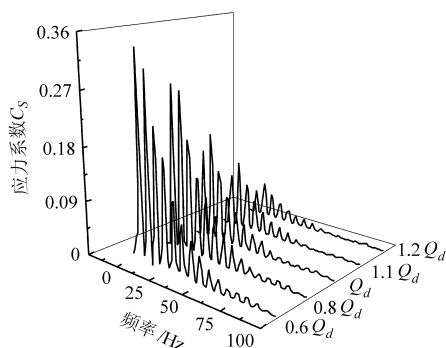


图 11 节点 4941 动应力频谱图

Fig. 11 Frequency spectra of dynamic stress at node 4941

由于出口边交错,使得水流相互掺混,是载荷主频发生变化,这点已在流场计算时得到印证^[10]。

(3) 在小流量工况 ($0.6Q_d, 0.8Q_d$) 下,应力第一主频为叶轮转频,第二主频幅值与第一主频幅值相近。在设计工况与大流量工况 ($1.1Q_d, 1.2Q_d$) 下,第一主频变为 2 倍转频。 $0.6Q_d$ 工况下,第一主频幅值是设计工况下的 2 倍,是 $1.2Q_d$ 工况下第一主频

幅值的 5 倍。

5 结论

(1) 本文双吸离心泵叶轮动应力值随叶轮呈周期性变化,最大等效应力可能发生在叶片进、出口边根部,在进行疲劳分析时应在这两个部位进行校核。

(2) 合理的叶片扭曲可以改善水泵叶轮的水力性能,但是由于叶片形状扭曲,使得扭曲部位应力会发生突变,所以在进行叶片设计时,对叶片扭曲导致的应力变化应给予关注,尤其是扭曲发生在叶片进、出口边的情况下。

(3) 在小流量工况下叶轮动应力幅值较高,设计工况和大流量下动应力幅值相对较低。当水泵运行在小流量工况下时,由于动应力水平较高,引起疲劳破坏可能性增加,所以应避免长时间小流量工况运行。

(4) 动应力频率成分主要为转频及其谐频。第一主频在不同工况下叶轮不同部位有所不同。

参 考 文 献

- 丛国辉,王福军. 双吸离心泵隔舌区压力脉动特性分析[J]. 农业机械学报,2008,39(6):60~67.
Cong Guohui, Wang Fujun. Numerical investigation of unsteady pressure fluctuations near volute tongue in a double-suction centrifugal pump [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(6):60~67. (in Chinese)
- 王福军,张玲,张志民. 轴流泵不稳定流场的压力脉动特性研究[J]. 水利学报,2007,38(8):1 003~1 009.
Wang Fujun, Zhang Ling, Zhang Zhimin. Analysis on pressure fluctuation of unsteady flow in axial-flow pump [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, 38(8):1 003~1 009. (in Chinese)
- 解幸幸,程晓农. 泵叶轮的强度分析和寿命预测方法[J]. 排灌机械,1996(3):7~10.
Xie Xingxing, Cheng Xiaonong. A method of analyzing strength and estimating service life for pump impeller [J]. Drainage and Irrigation Machinery, 1996(3):7~10. (in Chinese)
- Katsutoshi Kobayashi, Shigeyoshi Ono, Ichiro Harada, et al. Numerical analysis of stress on pump blade by one way coupled fluid structure simulation [J]. Journal of Fluid Science and Technology, 2010, 5(2): 219~234.
- 陈向阳,袁丹青,杨敏官,等. 基于流固耦合方法的 300 MWe 级反应堆主泵叶片应力分析[J]. 机械工程学报,2010, 46(4):111~115.
Chen Xiangyang, Yuan Danqing, Yang Minguan, et al. Blade stress of the reactor coolant pump of 300 MWe nuclear power plant in China based on fluid-solid coupling method [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(4):111~115. (in Chinese)
- Flores M, Kubiak J, Urquiza G, et al. Modal analysis and estimation of crack initiation life of a hydraulic francis turbine runner [C]// Proceedings of the 24th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and systems. Fozdo Iguassu, Brazil, 2008.
- 肖若富,王正伟,罗永要. 基于流固耦合的混流式水轮机转轮静应力特性分析[J]. 水力发电学报,2007,26(3):120~124.
Xiao Ruofu, Wang Zhengwei, Luo Yongyao. Stress analysis of Francis turbine runners based on FSI [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2007, 26(3):120~124. (in Chinese)
- Xiao Ruofu, Wang Zhengwei, Luo Yongyao. Dynamic stresses in a francis turbine runner based on fluid-structure interaction analysis [J]. Tsinghua Science and Technology, 2008, 13 (5): 587~592.
- 郑小波,罗兴镛,郭鹏程. 基于 CFD 分析的轴流式叶片动应力问题研究[J]. 水力发电学报,2009,28(3): 187~192.
Zheng Xiaobo, Luo Xingqi, Guo Pengcheng. Dynamic stress analysis of axial turbine blade based on CFD [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2009, 28(3): 187~192. (in Chinese)
- Qu Lixia, Wang Fujun, Liu Zhuqing. Numerical analysis of unsteady flow in a large double suction centrifugal pump [C]// Proceeding of 2010 International Conference on Pumps and Fans., Hangzhou, China, 2010.

- 8 丛小青,袁寿其,袁丹青. 无过载排污泵正交试验研究[J]. 农业机械学报, 2005, 36(10): 66~69.
Cong Xiaoqing, Yuan Shouqi, Yuan Danqing. Research of latin square test on non-overload sewage pumps[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2005, 36(10): 66~69. (in Chinese)
 - 9 Jorge L Parrondo-Gayo, Jose Gonzalez-Perez, Joaquin Fernandez-Francos. The effect of the operating point on the pressure fluctuations at the blade passage frequency in the volute of a centrifugal pump [J]. ASME Journal of Fluids Engineering, 2002, 124(3): 784~790.
 - 10 郭鹏程, 罗兴铨, 刘胜柱. 离心泵内叶轮与蜗壳间耦合流动的三维紊流数值模拟[J]. 农业工程学报, 2005, 21(8): 1~5.
Guo Pengcheng, Luo Xingqi, Liu Shengzhu. Numerical simulation of 3D turbulent flow fields through a centrifugal pump including impeller and volute casing [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2005, 21(8): 1~5. (in Chinese)
 - 11 施卫东, 汪永志, 孔繁余, 等. 旋流泵无叶腔内部流场数值模拟[J]. 农业工程学报, 2005, 21(9): 72~75.
Shi Weidong, Wang Yongzhi, Kong Fanyu, et al. Numerical simulation of internal flow field within the volute of vortex pump [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2005, 21(9): 72~75. (in Chinese)
 - 12 沈艳宁,袁寿其,陆伟刚,等. 复合叶轮离心泵数值模拟正交试验设计方法[J]. 农业机械学报,2010,41(9):22~26.
Shen Yanning, Yuan Shouqi, Lu Weigang, et al. Orthogonal test design method based on numerical simulation for non-overload centrifugal pump with complex impeller [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(9):22~26. (in Chinese)
-

(上接第 47 页)

- 11 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京:清华大学出版社,1997.
- 12 余茂宏. 工程强度理论[M]. 北京:高等教育出版社,1999.
- 13 杨敏. 双吸离心泵非定常流场与叶轮动应力特性研究[D]. 北京:中国农业大学,2010.
Yang Min. Study on unsteady flow and impeller dynamic in a double suction centrifugal pump [D]. Beijing: China Agricultural University, 2010. (in Chinese)
- 14 He Lingyan, Wang Fujun, Yang Min, et al. Modal analysis of double-suction centrifugal pump impellers [C]//Proceeding of 2010 International Conference on Pumps and Fans. Hangzhou, China, 2010.
- 15 Man liu, Gorman D G. Formulation of Rayleigh damping and its extensions [J]. Computers & Structures, 1995, 57(2): 277~285.
- 16 曹剑锦,何永明,廖继荣,等. 大朝山水轮机转轮动应力试验研究[J]. 东方电气评论,2005,19(1):25~31.
Cao Jianmian, He Yongming, Liao Jirong, et al. Testing research of dynamic stress of hydraulic runner for Dachaooshan power station [J]. Dongfang Electric Review, 2005, 19(1): 25~31. (in Chinese)