

2UPR – RPU 过约束并联机构刚度性能评价

杨超¹ 叶伟² 张克涛³ 黄凤立¹ 张伟中²

(1. 嘉兴学院机电工程学院, 嘉兴 314001; 2. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018;
3. 伦敦玛丽女王大学工程与材料学院, 伦敦 E1 4NS)

摘要: 运用螺旋理论和应变能方法研究了具有 2R1T 三自由度的 2UPR – RPU 过约束并联机构的静弹性刚度性能, 模型考虑了杆件和关节的柔度。首先, 基于螺旋理论得到分支的约束螺旋系; 其次, 基于材料力学得到分支中杆件的应变能, 通过映射分支约束螺旋系到铰空间得到关节的应变能, 通过汇总杆件、关节的应变能和卡氏定理得到与约束螺旋系对应的分支紧凑刚度矩阵; 最后, 通过虚功原理得到机构的总体刚度矩阵。采用有限元商业软件建立了有限元模型, 并与理论模型进行对比, 验证了理论模型的正确性。定义弹性元件存储的应变能与总应变能之比作为应变能因子指标, 给出了应变能因子指标在规则工作空间的四维切片分布图, 从应变能的角度定量评价了各弹性元件对机构刚度性能的影响程度, 给出了不同载荷作用下的全局应变能因子指标。本研究为定位对机构刚度性能影响最大的弹性元件提供了新的思路。

关键词: 并联机构; 应变能; 静弹性刚度模型; 刚度性能评价

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2020)02-0392-10 OSID: 

Stiffness Performance Evaluation of 2UPR – RPU Over-constrained Parallel Mechanism

YANG Chao¹ YE Wei² ZHANG Ketao³ HUANG Fengli¹ ZHANG Weizhong²

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China
2. Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China
3. School of Engineering and Material Science, Queen Mary University of London, London E1 4NS, UK)

Abstract: The elastostatic stiffness modeling of a 2UPR – RPU parallel manipulator with 2R1T three degrees of freedom was studied based on the screw theory and strain energy, considering the compliance of the bars and joints. Firstly, the limb constraint wrenches was formulated based on the screw theory. Secondly, the strain energy of bar was formulated by material mechanics, and joint by mapping the constraint wrenches to the joint space, and concentrated limb stiffness matrix corresponding to the constraint wrenches was thus obtained by summarizing the strain energy of bars and joints in the limb, and combining with the Castigliano second theorem. Finally, the overall stiffness matrix was assembled based on the virtual work principle. The theoretical result was verified by commercial ANSYS software. The strain energy factor index was defined as the strain energy of the elastic component account for total strain energy for illustrating the influence of each elastic component on the stiffness performance of the mechanism. A four-dimensional image of slice distribution was presented, the influence of each elastic element on the stiffness performance of the 2UPR – RPU parallel mechanism was quantitatively evaluated from the perspective of strain energy. Finally, the global strain energy factor indices of the mechanism under different external wrenches were presented to find the elastic component with the maximum compliance. The proposed modeling provided a new ideas for improving the stiffness performance of the mechanism more effectively.

Key words: parallel mechanism; strain energy; elastostatic stiffness modeling; stiffness performance evaluation

收稿日期: 2019 – 07 – 01 修回日期: 2019 – 08 – 04

基金项目: 国家自然科学基金项目(51705465)和浙江省基础公益研究计划项目(LGG19E050029, LGG19E050018)

作者简介: 杨超(1982—), 男, 讲师, 博士, 主要从事并联机器人研究, E-mail: yangchaox@163.com

通信作者: 黄凤立(1976—), 男, 教授, 博士, 主要从事现代设计理论与方法研究, E-mail: hfl@zjxu.edu.cn

0 引言

少自由度并联机构结构简单,具有高刚度性能和优异的动力学性能^[1-2]。过约束并联机构是少自由度并联机构中的重要一类,过约束的存在可以提高机构刚度和消除奇异,过约束并联机构在重载或高精度要求场合下有着重要的应用,刚度性能是过约束并联机构的重要性能指标之一。

并联机构刚度建模的理论模型包括解析模型和半解析模型,对预设计阶段并联机构刚度性能的快速评估具有重要的作用。许多学者为此建立了多种刚度建模方法,包括虚铰方法、矩阵位移法、应变能方法和螺旋理论方法等。

虚铰方法将杆件当作两端由六自由度弹簧支撑的刚性杆件。ZHANG 等^[3]采用虚铰方法建立了 Exechon 过约束并联机构的刚度模型。WANG 等^[4]基于虚铰方法建立了 Tricept 并联机构的刚度模型,并考虑了铰链的柔度。虚铰方法需要处理冗余的弹簧约束,增加了刚度模型的复杂性^[5-6]。矩阵位移法^[7-8]将连杆作为一个梁单元处理,通过变形协调方程装配得到总体刚度矩阵。DEBLAISE 等^[9]采用矩阵位移法建立了 Delta 并联机构的刚度模型,KLIMCHIK 等^[10]介绍了矩阵位移法的基本原理,并建立了 NaVaRo 平面机构的刚度模型。矩阵位移法在有限元法的耗时性与解析方法的高效性之间取得了较好的权衡,计算精度较高。然而,矩阵位移法涉及矩阵的高维操作和大量的变形协调方程。螺旋理论方法基于螺旋理论得到分支的约束螺旋系,然后根据虚功原理得到机构的整体刚度矩阵,其优点是降低了分支约束螺旋系的维度,从而大大减少了变形协调方程的数目。文献[11-14]基于螺旋理论方法提出了分支约束螺旋系刚度矩阵的概念,建立了 3-PRRR 等并联机构的刚度模型,但建立分支刚度矩阵用了两次映射,增加了过程的复杂度。文献[15-17]基于螺旋理论方法建立了 2PRU-UPR 等并联机构的刚度模型,将分支约束螺旋系分解为梁的基本变形形式,思路简单,但却增加了分支刚度矩阵的维度,且模型中均未考虑剪切变形的影响和铰链的柔度。汪满新等^[18]考虑重力的影响建立了 3-RRS 并联机构的刚度模型,得到了各构件刚度对末端刚度的影响。徐东涛等^[19]考虑重力的影响建立了改进型 Delta 并联机构的刚度模型。利用应变能方法分析机构在外载荷作用下存储的应变能,结合卡氏定理建立机构的刚度模型,其优点是物理意义明确。文献[20-22]基于应变能方法建立了 Delta 和 3-PSP 等并联机构的刚度模型,但作者只

考虑了受力较简单的非过约束机构,没有将应变能方法推广到过约束机构,YANG 等^[23]结合螺旋理论将应变能方法推广到过约束并联机构,建立了 2PUR-PSR 并联机构的刚度模型,然而却忽略了铰链的柔度。半解析方法^[24]是通过有限元方法或厂家得到关节的刚度矩阵,由解析法得到连杆的刚度矩阵,然后通过变形协调方程装配得到机构的整体刚度矩阵,兼顾了解析法的高效率和有限元法的高精度。LIAN 等^[25]基于半解析法建立了 T5 并联机构的刚度模型。LIU 等^[26]考虑连杆和铰链的柔度建立了 3-PRS 并联机构的刚度模型。CAO 等^[27]考虑重力的影响建立了 5-PRUR 和 4-RRRRR 过约束并联机构的刚度模型,完善了计及重力影响的并联机构静弹性刚度模型。但以上研究成果中并没有得到各个弹性元件对机构刚度性能的影响程度。

本文基于应变能和螺旋理论建立 2UPR-RPU 过约束并联机构的刚度模型,同时考虑连杆和铰链的柔度。基于应变能的方法得到各个弹性元件对机构刚度性能的影响程度,以期为评价机构刚度性能影响最大的弹性元件提供思路,为提高机构的刚度性能提供新的方法。

1 机构描述

2UPR-RPU 过约束并联机构如图 1 所示,动平台 $A_1A_2A_3$ 通过两个 UPR 分支和一个 RPU 分支与基座 $B_1B_2B_3$ 相连。参考坐标系建立如下:固定坐标系 $OXYZ$ 的原点为 B_1B_2 的中点, X 轴沿 B_1B_2 方向, Y 轴沿 OB_3 方向, Z 轴由右手法则确定。动坐标系 $oxyz$ 的原点为 A_1A_2 的中点, x 轴沿 oA_2 方向, y 轴沿 oA_3 方向, z 轴由右手法则确定。分支坐标系 $A_ix_iy_iz_i$ 的原点为点 A_i ($i=1, 2, 3$), y_i 轴 ($i=1, 2$) 与 y 轴平行, x_3 轴与 X 轴平行, z_i 轴 ($i=1, 2, 3$) 沿着 A_iB_i 方向, x_i 轴 ($i=1, 2$) 和 y_3 轴由右手法则确定。R 铰坐标系 $o_{i1}u_{i1}v_{i1}w_{i1}$ 与分支坐标系 $A_ix_iy_iz_i$ 相同 ($i=1, 2$),U 铰坐标系 $o_{31}u_{31}v_{31}w_{31}$ 与分支坐标系 $A_3x_3y_3z_3$ 相同。U 铰坐标系 $o_{i2}u_{i2}v_{i2}w_{i2}$ 的原点为点 B_i ($i=1, 2$), u_{i2} 和 v_{i2} 轴分别沿 U 铰的两根轴线方向,RPU 分支 R 铰坐标系 $o_{32}u_{32}v_{32}w_{32}$ 的原点为点 B_3 , u_{32} 轴沿 R 铰轴线方向。对于两条 UPR 分支,R 铰轴线与 y 轴平行,U 铰的第 1 个轴线与 B_1B_2 共线,第 2 个轴线与另一端的 R 铰轴线平行。对于 RPU 分支,R 铰轴线平行于 X 轴,U 铰的第 1 条轴线与另一端的 R 铰轴线平行,第 2 条轴线与 y 轴平行。3 个 P 副作为输入,并分别与 R 铰轴线垂直。这种特殊的安排使得机构具有 3 个自由度^[28]:沿 Oo 的移动、绕 X 轴的旋转 β 和绕 y 轴的旋转 γ 。详细的运动学分析可参照文献[28]。

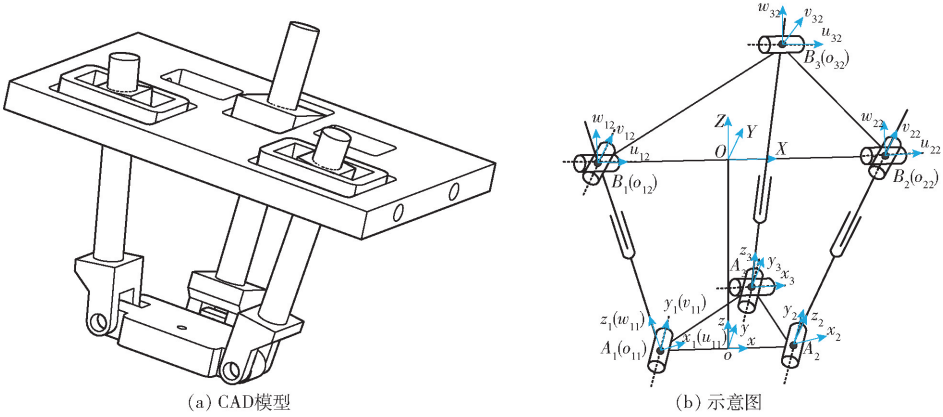


图1 2UPR-RPU 并联机构
Fig.1 2UPR-RPU mechanism

2 静弹性刚度模型

本文刚度模型作如下假设:忽略所有元件的质量和摩擦、基座和动平台假设为刚性。考虑关节的柔度以及杆件的轴向拉压、剪切、扭转和弯曲的空间复合弹性变形。

2.1 UPR 分支刚度矩阵

由螺旋理论可知,UPR 分支施加给动平台一个驱动螺旋 $\$_{ia}$ 和两个约束螺旋 $\$_{i1}^r$ 、 $\$_{i2}^r$ ($i=1,2$)。 $\$_{ia}$ 表示通过 U 铰中心 B_i 指向 R 铰中心 A_i 的一个力, $\$_{i1}^r$ 表示通过 U 铰中心 B_i 并与 R 铰轴线平行的一个力, $\$_{i2}^r$ 表示垂直于 U 铰两条轴线的力偶。螺旋 $\$_{ia}$ 、 $\$_{i1}^r$ 和 $\$_{i2}^r$ 的幅值分别用 f_{i1} 、 f_{i2} 和 m_{i1} 表示。UPR 分支的受力分析如图 2 所示。

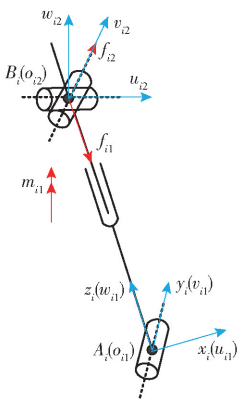


图2 UPR 分支受力分析图
Fig.2 Free-body diagram of UPR limb

f_{i1} 、 f_{i2} 和 m_{i1} 的单位矢量定义为

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_{i1} = \boldsymbol{l}_i \\ \boldsymbol{f}_{i2} = \boldsymbol{y}_i \\ \boldsymbol{\tau}_{i1} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{y}_i \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{l}_i$ 、 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{y}_i$ —— B_iA_i 、 X 轴、 y_i 轴的单位矢量
UPR 分支任意截面处内力可表达为

$$\begin{cases} f_{x_i} = f_{i1} \\ f_{y_i} = f_{i2} \\ f_{z_i} = 0 \\ m_{x_i} = m_{i1} {}^{A_i}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{A_i}\boldsymbol{x}_i - L_i f_{i2} + v_i f_{i2} \\ m_{y_i} = 0 \\ m_{z_i} = m_{i1} {}^{A_i}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{A_i}\boldsymbol{z}_i \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (2)$$

式中 L_i ——分支 B_iA_i 长度

杆件柔度矩阵可以由应变能和卡氏定理得到,杆件的柔度矩阵计算详见文献[29],在此不再赘述。

杆件柔度矩阵为

$$\boldsymbol{C}_i^B = \begin{bmatrix} \frac{L_i}{E_i A_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_i}{G_i A_{y_i}} + \frac{L_i^3}{3E_i I_{x_i}} & -\frac{\boldsymbol{\tau}_{i1} \boldsymbol{x}_i L_i^2}{2E_i I_{x_i}} \\ 0 & -\frac{\boldsymbol{\tau}_{i1} \boldsymbol{x}_i L_i^2}{2E_i I_{x_i}} & \frac{(\boldsymbol{\tau}_{i1} \boldsymbol{x}_i)^2 L_i}{E_i I_{x_i}} + \frac{(\boldsymbol{\tau}_{i1} \boldsymbol{z}_i)^2 L_i}{G_i I_i} \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (3)$$

式中 A_{y_i} 、 A_i ——截面沿 y_i 轴的有效剪切面积和截面面积
 E_i 、 G_i ——杆件材料弹性模量和剪切模量
 I_{x_i} 、 I_i ——截面对 x_i 轴的惯性矩和截面极惯性矩

杆件应变能可以表达为

$$U_i^B = \frac{1}{2} \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{\delta}_i^B = \frac{1}{2} \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{C}_i^B \boldsymbol{W}_i \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{W}_i = [f_{i1} \ f_{i2} \ m_{i1}]^T$
式中 U_i^B ——杆件储存的应变能
 $\boldsymbol{\delta}_i^B$ ——杆件与约束螺旋系对应的弹性变形量
将 $\boldsymbol{W}_i$ 映射至 R 铰坐标系 $\{o_{i1}\}$ 的原点并在铰空间投影得到

$$\begin{cases} {}^{o_{i1}}f_{u_{i1}}=0 \\ {}^{o_{i1}}f_{v_{i1}}=f_{i2} \\ {}^{o_{i1}}f_{w_{i1}}=-f_{i1} \\ {}^{o_{i1}}m_{u_{i1}}=-L_i f_{i2}+m_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{u}_{i1} \\ {}^{o_{i1}}m_{v_{i1}}=0 \\ {}^{o_{i1}}m_{w_{i1}}=m_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1} \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (5)$$

其中 ${}^{o_{i1}}\boldsymbol{u}_{i1}=[1 \ 0 \ 0]$ ${}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1}=[0 \ 0 \ 1]$

将式(5)进一步表达成矩阵形式为

$${}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{D}_{i1}\boldsymbol{W}_i \quad (i=1,2) \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{i1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -L_i & {}^{o_{i1}}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{u}_{i1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{o_{i1}}\boldsymbol{\tau}_{i1} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1} \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (7)$$

$${}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i=[{}^{o_{i1}}f_{u_{i1}} \ {}^{o_{i1}}f_{v_{i1}} \ {}^{o_{i1}}f_{w_{i1}} \ {}^{o_{i1}}m_{u_{i1}} \ {}^{o_{i1}}m_{v_{i1}} \ {}^{o_{i1}}m_{w_{i1}}]^T$$

式中 ${}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i$ ——坐标系 $\{o_{i1}\}$ 下 6×1 的矢量

$\boldsymbol{D}_{i1}$ ——从 $\boldsymbol{W}_i$ 到 ${}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i$ 的 6×3 映射矩阵

UPR 分支 R 铰在自身铰空间的柔度矩阵可以由有限元方法^[24-26]得到

$$\bar{\boldsymbol{C}}_{i1}^J=\begin{bmatrix} 1.536\times 10^{-10} & & & & & \\ & 4.536\times 10^{-10} & & & & 0 \\ & & 1.536\times 10^{-10} & & & \\ & & & 1.16\times 10^{-11} & & \\ & & & & \infty & \\ 0 & & & & & \infty \\ & & & & & & 1.16\times 10^{-11} \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (8)$$

式中,前 3 项单位为 m/N,后 3 项单位为 rad/(N·m)。

因此,UPR 分支 R 铰所存储的应变能可表达为

$$U_{i1}^J=\frac{1}{2} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i^T {}^{o_{i1}}\boldsymbol{\delta}_{i1}=\frac{1}{2} {}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i^T \bar{\boldsymbol{C}}_{i1}^J {}^{o_{i1}}\boldsymbol{W}_i=\frac{1}{2} \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{C}_{i1}^J \boldsymbol{W}_i \quad (i=1,2) \quad (9)$$

其中 $\boldsymbol{C}_{i1}^J=\boldsymbol{D}_{i1}^T \bar{\boldsymbol{C}}_{i1}^J \boldsymbol{D}_{i1} \quad (i=1,2) \quad (10)$

式中 U_{i1}^J ——UPR 分支 R 铰存储的应变能

$\boldsymbol{C}_{i1}^J$ ——UPR 分支 R 铰与约束螺旋系对应的 3×3 的柔度矩阵

同样的方法,将 $\boldsymbol{W}_i$ 映射至 U 铰坐标系 $\{o_{i2}\}$ 的原点并在铰空间投影得到

$$\begin{cases} {}^{o_{i2}}f_{u_{i2}}=f_{i1} {}^{o_{i2}}\boldsymbol{R}_{o_{i1}}(-{}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1}) {}^{o_{i2}}\boldsymbol{u}_{i2} \\ {}^{o_{i2}}f_{v_{i2}}=f_{i2} \\ {}^{o_{i2}}f_{w_{i2}}=f_{i1} {}^{o_{i2}}\boldsymbol{R}_{o_{i1}}(-{}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1}) {}^{o_{i2}}\boldsymbol{w}_{i2} \\ {}^{o_{i2}}m_{u_{i2}}=0 \\ {}^{o_{i2}}m_{v_{i2}}=0 \\ {}^{o_{i2}}m_{w_{i2}}=m_{i1} \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (11)$$

其中 ${}^{o_{i2}}\boldsymbol{u}_{i2}=[1 \ 0 \ 0]$ ${}^{o_{i2}}\boldsymbol{w}_{i2}=[0 \ 0 \ 1]$

式中 ${}^{o_{i2}}\boldsymbol{R}_{o_{i1}}$ ——坐标系 $\{o_{i1}\}$ 到坐标系 $\{o_{i2}\}$ 的变换矩阵

式(11)可以进一步表达成矩阵形式为

$${}^{o_{i2}}\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{D}_{i2}\boldsymbol{W}_i \quad (i=1,2) \quad (12)$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{i2}=\begin{bmatrix} {}^{o_{i2}}\boldsymbol{R}_{o_{i1}}(-{}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1}) {}^{o_{i2}}\boldsymbol{u}_{i2} & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ {}^{o_{i2}}\boldsymbol{R}_{o_{i1}}(-{}^{o_{i1}}\boldsymbol{w}_{i1}) {}^{o_{i2}}\boldsymbol{w}_{i2} & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (13)$$

$${}^{o_{i2}}\boldsymbol{W}_i=[{}^{o_{i2}}f_{u_{i2}} \ {}^{o_{i2}}f_{v_{i2}} \ {}^{o_{i2}}f_{w_{i2}} \ {}^{o_{i2}}m_{u_{i2}} \ {}^{o_{i2}}m_{v_{i2}} \ {}^{o_{i2}}m_{w_{i2}}]^T$$

式中 ${}^{o_{i2}}\boldsymbol{W}_i$ ——坐标系 $\{o_{i2}\}$ 下 6×1 的矢量

$\boldsymbol{D}_{i2}$ ——从 $\boldsymbol{W}_i$ 到 ${}^{o_{i2}}\boldsymbol{W}_i$ 的 6×3 映射矩阵

UPR 分支 U 铰所存储的应变能和 U 铰与约束螺旋系对应的柔度矩阵为

$$\begin{cases} U_{i2}^J=\frac{1}{2} \boldsymbol{W}_i^T \boldsymbol{C}_{i2}^J \boldsymbol{W}_i \\ \boldsymbol{C}_{i2}^J=\boldsymbol{D}_{i2}^T \bar{\boldsymbol{C}}_{i2}^J \boldsymbol{D}_{i2} \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (14)$$

其中 $\bar{\boldsymbol{C}}_{i2}^J=$

$$\begin{bmatrix} 3.537\times 10^{-10} & & & & & \\ & 2.280\times 10^{-10} & & & & 0 \\ & & 5.302\times 10^{-10} & & & \\ & & & \infty & & \\ & & & & \infty & \\ 0 & & & & & \infty \\ & & & & & & 3.010\times 10^{-11} \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (15)$$

式中 U_{i2}^J ——UPR 分支 U 铰存储的应变能

$\boldsymbol{C}_{i2}^J$ ——UPR 分支 U 铰与约束螺旋系对应的 3×3 的柔度矩阵

$\bar{\boldsymbol{C}}_{i2}^J$ ——UPR 分支 U 铰在自身铰空间下的柔度矩阵,通过有限元分析得到^[24-26]

其中,式(15)等号右侧前 3 项单位为 m/N,后 3 项

单位为 $\text{rad}/(\text{N}\cdot\text{m})$ 。

UPR 分支的应变能可以通过对杆件和铰链存储的应变能求和得到

$$\begin{cases} U_i = U_i^B + U_{i1}^J + U_{i2}^J = \frac{1}{2} \mathbf{W}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{W}_i \\ \mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i^B + \mathbf{D}_{i1}^T \bar{\mathbf{C}}_{i1}^J \mathbf{D}_{i1} + \mathbf{D}_{i2}^T \bar{\mathbf{C}}_{i2}^J \mathbf{D}_{i2} \end{cases}$$

$(i=1,2)$

(16)

UPR 分支的紧凑刚度矩阵可以通过对式(16)中的柔度矩阵求逆得到

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{C}_i^{-1} = (\mathbf{C}_i^B + \mathbf{D}_{i1}^T \bar{\mathbf{C}}_{i1}^J \mathbf{D}_{i1} + \mathbf{D}_{i2}^T \bar{\mathbf{C}}_{i2}^J \mathbf{D}_{i2})^{-1}$$

$(i=1,2)$

(17)

UPR 分支与约束螺旋系对应的弹性变形可以由卡氏第二定理得

$$\boldsymbol{\delta}_i = \frac{\partial U_i}{\partial \mathbf{W}_i} = \mathbf{C}_i \mathbf{W}_i$$

(18)

2.2 RPU 分支紧凑刚度矩阵

由螺旋理论可知, RPU 分支施加给动平台 1 个驱动螺旋 $\$_{3a}$ 和 2 个约束螺旋 $\$_{31}^r$ 、 $\$_{32}^r$ 。 $\$_{3a}$ 表示通过 U 铰中心 A_3 指向 R 铰中心 B_3 的一个力, $\$_{31}^r$ 表示通过 U 铰中心 A_3 并与 R 铰轴线平行的一个力, $\$_{32}^r$ 表示垂直于 U 铰两条轴线的一个力偶。螺旋 $\$_{3a}$ 、 $\$_{31}^r$ 和 $\$_{32}^r$ 的幅值分别用 f_{31} 、 f_{32} 和 m_{31} 表示。RPU 分支的受力分析图如图 3 所示。

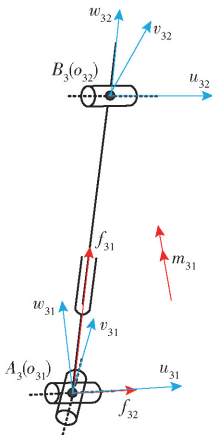


图 3 RPU 分支受力分析图

Fig. 3 Free-body diagram of RPU limb

f_{31} 、 f_{32} 和 m_{31} 的单位矢量定义为

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{31} = \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{f}_{32} = \mathbf{x}_3 \\ \boldsymbol{\tau}_{31} = \mathbf{X} \mathbf{y}_3 \end{cases}$$

(19)

式中 $\mathbf{l}_3$ —— A_3B_3 的单位矢量

$\mathbf{x}_3$ 、 $\mathbf{y}_3$ ——沿 x_3 、 y_3 轴的单位矢量

同样的方法可以得到 RPU 分支杆件的柔度矩阵为

$$\mathbf{C}_3^B = \begin{bmatrix} \frac{L_3}{E_3 A_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_3}{G_3 A_{x_3}} + \frac{L_3^3}{3 E_3 I_{y_3}} & -\frac{\tau_{31} y_3 L_3^2}{2 E_3 I_{y_3}} \\ 0 & -\frac{\tau_{31} y_3 L_3^2}{2 E_3 I_{y_3}} & \frac{(\tau_{31} y_3)^2 L_3}{E_3 I_{y_3}} + \frac{(\tau_{31} z_3)^2 L_3}{G_3 I_3} \end{bmatrix}$$

(20)

根据力的平移定理, 将 $\mathbf{W}_3$ 平移至 U 铰的中心并在铰空间坐标系 $\{o_{31}\}$ 下投影可以得到

$${}^{o_{31}}\mathbf{W}_3 = \mathbf{D}_{31} \mathbf{W}_3$$

(21)

其中

$$\mathbf{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ {}^{o_{31}}\mathbf{l}_3 \cdot {}^{o_{31}}\mathbf{v}_{31} & 0 & 0 \\ {}^{o_{31}}\mathbf{l}_3 \cdot {}^{o_{31}}\mathbf{w}_{31} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(22)

式中 $\mathbf{D}_{31}$ ——从 $\mathbf{W}_3$ 到 ${}^{o_{31}}\mathbf{W}_3$ 的 6×3 映射矩阵

同理, 将 $\mathbf{W}_3$ 平移至 R 铰的中心并在铰空间坐标系 $\{o_{32}\}$ 下投影可以得到

$${}^{o_{32}}\mathbf{W}_3 = \mathbf{D}_{32} \mathbf{W}_3$$

(23)

其中

$$\mathbf{D}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 & {}^{o_{32}}\boldsymbol{\tau}_{31} \cdot {}^{o_{32}}\mathbf{v}_{32} \\ 0 & 0 & {}^{o_{32}}\boldsymbol{\tau}_{31} \cdot {}^{o_{32}}\mathbf{w}_{32} \end{bmatrix}$$

(24)

式中 $\mathbf{D}_{32}$ ——从 $\mathbf{W}_3$ 到 ${}^{o_{32}}\mathbf{W}_3$ 的 6×3 映射矩阵

RPU 分支的 U 铰和 R 铰在自身铰空间的柔度矩阵^[24-26]分别为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{C}}_{31}^J = \text{diag}(4.017 \times 10^{-10}, 2.804 \times 10^{-10}, \\ \quad 5.525 \times 10^{-10}, \infty, \infty, 3.220 \times 10^{-11}) \\ \bar{\mathbf{C}}_{32}^J = \text{diag}(3.817 \times 10^{-10}, 1.216 \times 10^{-10}, \\ \quad 1.216 \times 10^{-10}, \infty, 2.71 \times 10^{-11}, 2.71 \times 10^{-11}) \end{cases}$$

(25)

与计算 UPR 分支应变能类似, RPU 分支所存储的应变能可以表达为

$$\begin{aligned} U_3 &= U_3^B + U_{31}^J + U_{32}^J = \\ &\frac{1}{2} \mathbf{W}_3^T \mathbf{C}_3^B \mathbf{W}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{W}_3^T \mathbf{D}_{31}^T \bar{\mathbf{C}}_{31}^J \mathbf{D}_{31} \mathbf{W}_3 + \\ &\frac{1}{2} \mathbf{W}_3^T \mathbf{D}_{32}^T \bar{\mathbf{C}}_{32}^J \mathbf{D}_{32} \mathbf{W}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{W}_3^T \mathbf{C}_3 \mathbf{W}_3 \end{aligned}$$

(26)

其中

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_3^B + \mathbf{D}_{31}^T \bar{\mathbf{C}}_{31}^J \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}^T \bar{\mathbf{C}}_{32}^J \mathbf{D}_{32}$$

(27)

式中 $\mathbf{C}_3$ ——RPU 分支与约束螺旋系对应的分支紧凑柔度矩阵

对式(27)求逆即可得 RPU 分支紧凑刚度矩阵

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{C}_3^{-1} = (\mathbf{C}_3^B + \mathbf{D}_{31}^T \overline{\mathbf{C}}_{31}^J \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}^T \overline{\mathbf{C}}_{32}^J \mathbf{D}_{32})^{-1} \tag{28}$$

由卡氏第二定理可以得到 RPU 分支与约束螺旋系对应的弹性变形

$$\boldsymbol{\delta}_3 = \frac{\partial U_3}{\partial \mathbf{W}_3} = \mathbf{C}_3 \mathbf{W}_3 \tag{29}$$

2.3 整体刚度矩阵

参考固定坐标系,2UPR-RPU 并联机构动平台的平衡方程可以表达为

$$\mathbf{P} = (\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3) \mathbf{W} = \mathbf{J} \mathbf{W} \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{F}; \mathbf{M}] \\ \mathbf{J}_i &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\$}_{ia} & \boldsymbol{\$}_{il}^r & \boldsymbol{\$}_{i2}^r \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \\ \mathbf{W} &= [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2 \quad \mathbf{W}_3] \end{aligned}$$

式中 $\mathbf{P}$ ——作用在动平台的外部载荷
 $\mathbf{J}_i$ ——分支 i 的 6×3 约束螺旋系矩阵
 $\mathbf{J}$ —— 6×9 矩阵 $\mathbf{W}$ —— 9×1 矢量
 $\mathbf{F}$ ——作用在动平台的外力
 $\mathbf{M}$ ——作用在动平台的外力偶

动平台考虑为刚性,其虚功方程可以表达为

$$\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Delta} = [\mathbf{W}_1 \cdots \mathbf{W}_i \cdots \mathbf{W}_n]^T [\boldsymbol{\delta}_1 \cdots \boldsymbol{\delta}_i \cdots \boldsymbol{\delta}_n] = \mathbf{W}_i^T \boldsymbol{\delta}_1 + \cdots + \mathbf{W}_n^T \boldsymbol{\delta}_n \tag{31}$$

式中 $\boldsymbol{\Delta}$ ——动平台与外部载荷 $\mathbf{P}$ 对应的弹性变形
联立方程(30)、(31)得

$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{J}_i^T \boldsymbol{\Delta} \quad (i=1,2,3) \tag{32}$$

将方程(18)、(29)、(32)代入方程(30)得

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \mathbf{K}_i \mathbf{J}_i^T \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{K} \boldsymbol{\Delta} \tag{33}$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \mathbf{K}_i \mathbf{J}_i^T \tag{34}$$

式中 $\mathbf{K}$ ——机构的整体刚度矩阵

对方程(34)求逆可以得到机构的整体柔度矩阵

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{J}_i \mathbf{K}_i \mathbf{J}_i^T \right)^{-1} \tag{35}$$

根据材料力学可得各分支约束螺旋系的幅值为

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{K}_i \boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{C} \mathbf{P} \tag{36}$$

机构的总应变能可以表达为

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \tag{37}$$

3 理论模型与有限元模型对比

为了验证本文理论模型的正确性,采用 ANSYS Workbench 商业软件建立机构 2 个位型的有限元模型和理论模型作对比,位型 1: $z = -600 \text{ mm}, \beta = 0^\circ, \gamma = 0^\circ$,位型 2: $z = -600 \text{ mm}, \beta = 5^\circ, \gamma = -3^\circ$,2 个位型统一在 o 点施加外部载荷 $\mathbf{P} = (30 \text{ N}, -50 \text{ N}, -40 \text{ N}, 10 \text{ N} \cdot \text{m}, -20 \text{ N} \cdot \text{m}, 50 \text{ N} \cdot \text{m})$ 。2UPR-RPU 并联机构物理参数为: $l_{OB1} = l_{OB2} = l_{OB3} = 390 \text{ mm}$, $l_{oA1} = l_{oA2} = l_{oA3} = 260 \text{ mm}$, $E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}$, $G_1 = G_2 = G_3 = 80 \text{ GPa}$, $d_1 = d_2 = d_3 = 100 \text{ mm}$, d_1 、 d_2 和 d_3 分别表示 3 个杆件的横截面直径。2UPR-RPU 并联机构在两个位型下的变形云图如图 4 所示。表 1 给出了动平台 o 点的理论模型和有限元模型的变形量。由表 1 可知,理论模型与有限元模型的误差不大于 7.8%,验证了理论模型的正确性,可用于物理样机在预设计阶段的刚度性能评估。

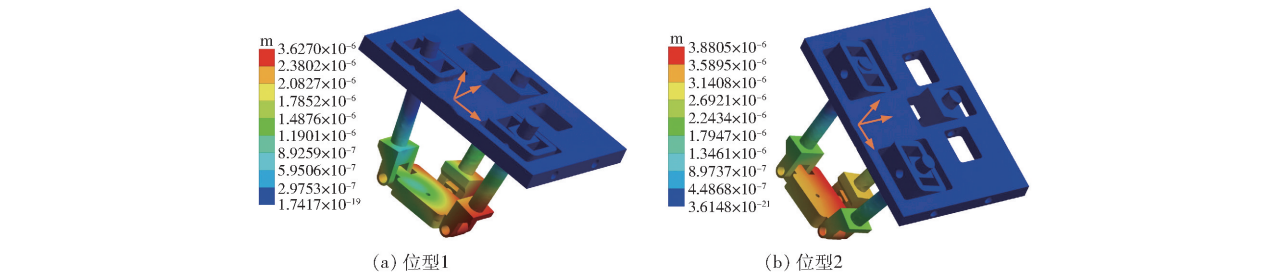


图 4 2UPR-RPU 并联机构变形量云图

Fig. 4 Contours of deformation for 2UPR-RPU PM

表 1 理论模型与有限元模型的计算结果对比

Tab. 1 Comparison of deformations of point o between analytical and FEA methods							
位型	方法	$\Delta l_x/\mu\text{m}$	$\Delta l_y/\mu\text{m}$	$\Delta l_z/\mu\text{m}$	$\Delta \alpha_x/\mu\text{rad}$	$\Delta \alpha_y/\mu\text{rad}$	$\Delta \alpha_z/\mu\text{rad}$
1	理论	3.400	-1.062	0.006	0.646	2.671	7.756
	有限元	3.503	-1.137	0.006	0.701	2.852	8.287
	误差/%	2.9	6.6	0	7.8	6.3	6.4
2	理论	3.627	-1.184	-0.119	0.863	2.170	8.459
	有限元	3.862	-1.265	-0.125	0.911	2.276	8.924
	误差/%	6.1	6.4	4.8	5.3	4.7	5.2

4 应变能因子指标

为了评价每一个弹性元件对机构整体刚度性能的影响程度,应变能因子指标定义为

$$\mu_{ij} = \frac{U_{ij}}{U} \tag{38}$$

式中 μ_{ij} ——应变能因子指标,其表示每一个弹性元件存储的应变能与机构总应变能的比率,范围为 0 ~ 1, μ_{ij} 越大表明此弹性元件存储的应变能越多

U_{ij} ——第 i 个分支的第 j 个弹性元件所存储的应变能

为了评价应变能因子指标在整个预规划工作空间的分布,全局应变能因子指标定义为

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{\int_V \mu_{ij} dV}{V} = \frac{1}{N} \sum \mu_{ij} \tag{39}$$

式中 V ——预规划工作空间体积
 N ——离散点数量
 $\bar{\mu}$ ——全局应变能因子指标,越大说明此弹性元件在工作空间内存储的应变能越大

工程应用中,可以计算应变能因子指标在预规划工作空间的分布,有针对性地提高应变能因子指标较大的元件的刚度性能,从而更有效地改善机构的刚度性能。

机构的规则工作空间受驱动的冲程、被动铰的角度限制以及杆件之间的干涉等因素的影响,2UPR – RPU 并联机构的物理约束如下

$$\begin{cases} 300\text{ mm} \leq L_i \leq 1\,000\text{ mm} \\ |\alpha_{i1}|_{\max} \leq 50^\circ \\ |\alpha_{i2}|_{\max} \leq 50^\circ \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{40}$$

式中 α_{i1} 、 α_{i2} ——R 铰和 U 铰的旋转角

图 5 为空间搜索法得到的 2UPR – RPU 并联机构的可达和规则工作空间。由图 5 可以看出,可达工作空间关于 $\gamma = 0$ 对称,这与 2UPR – RPU 并联机构的结构分布一致,然而可达工作空间不规则,不利于轨迹规划和算法控制,并且机构在可达工作空间的边缘子空间的运动学性能和刚度性能也较差。不失一般性,本文采用空间内每一层的最大内切圆组成的圆台作为预规划的规则工作空间,为了保证一定的操作空间,最大内切圆的最小半径设置为 10° 。

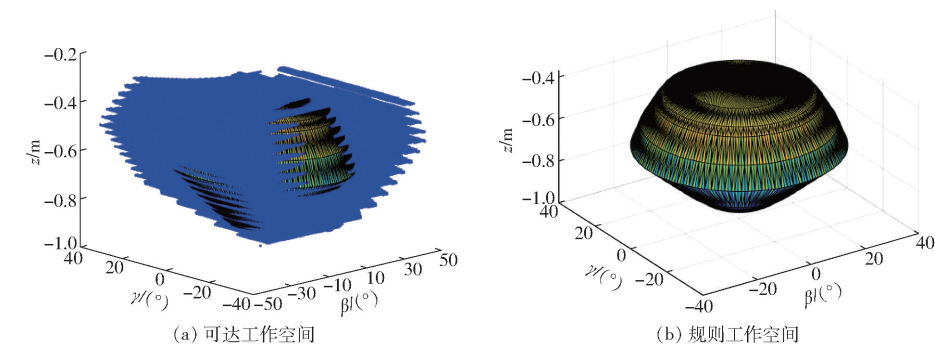


图 5 2UPR – RPU 并联机构工作空间
Fig. 5 Workspaces of 2UPR – RPU parallel mechanism

首先,施加外部载荷 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1 = (0, 0, 1\text{ N}, 0, 0, 0)$,机构总应变能和局部应变能因子指标在规则工作空间的分布如图 6、7 所示。由于对称性,此处仅考虑了第 1 个 UPR 分支的应变能因子指标的分布。 μ_{iR} 、 μ_{iB} 和 μ_{iU} 分别表示第 i 分支的 R 铰、杆件和 U 铰

的应变能因子指标,由图 6、7 可以看出,总应变能 U 和局部应变能因子指标 μ 均关于 $\gamma = 0$ 对称,这与机构的结构分布吻合,并且当给机构施加一个竖向力时,应变能最小即刚度性能最优的位置在初始位置。值得注意的是,UPR 分支杆件的 μ_{ij} 最大值为 0.45,

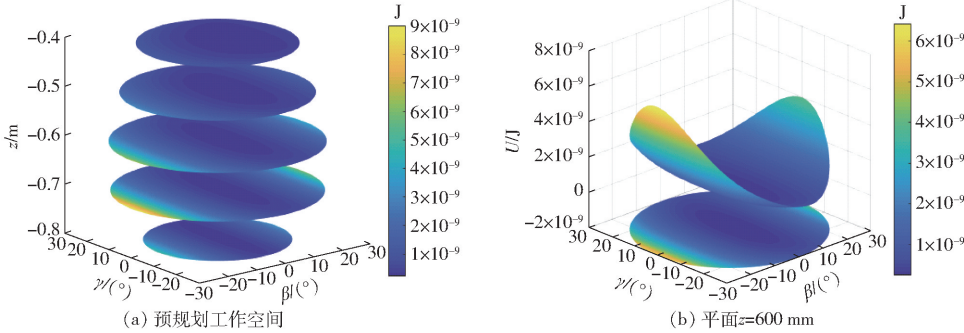


图 6 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1$ 时机机构的总应变能的分布
Fig. 6 Distributions of total strain energy when $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1$

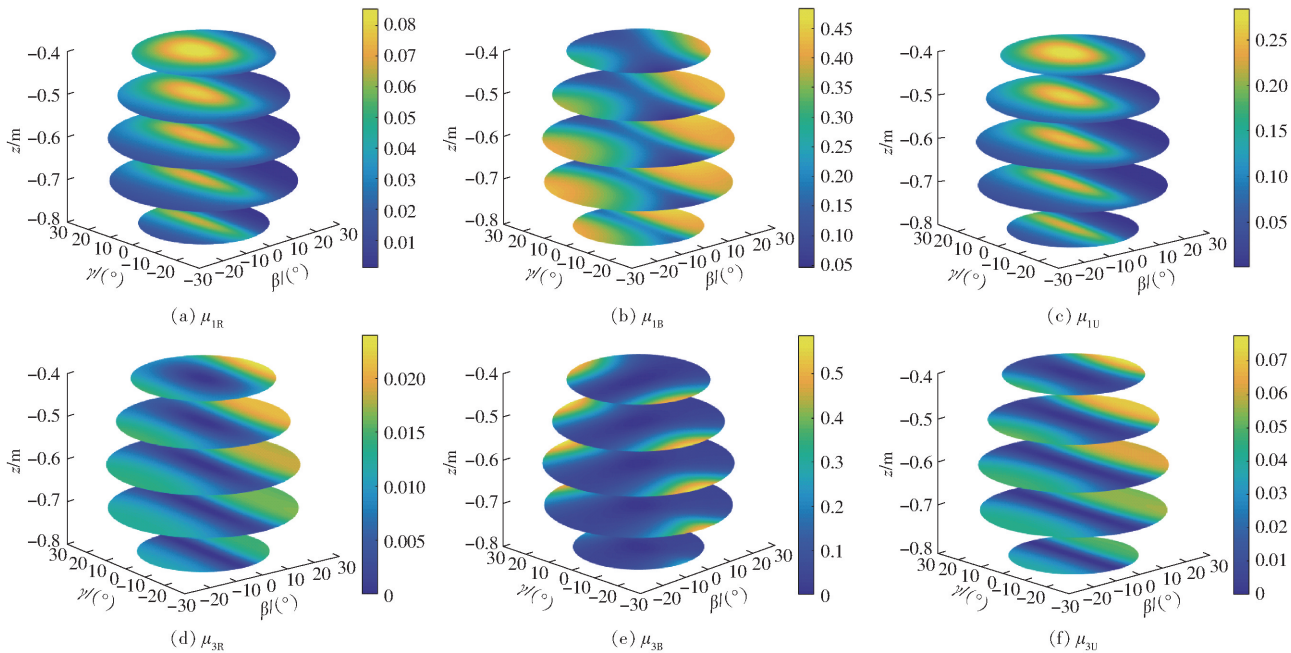


图 7 $P = P_1$ 时 μ 在预规划工作空间的分布

Fig. 7 Distributions of μ of each elastic component in prescribed workspace when $P = P_1$

RPU 分支杆件的 μ 最大值为 0.5;UPR 分支和 RPU 分支 R 铰的 μ_{ij} 最大值分别为 0.08 和 0.02;UPR 分支和 RPU 分支 U 铰的 μ_{ij} 最大值分别为 0.25 和 0.07。相同的 R 铰在不同的分支中其 μ_{ij} 分布不尽相同。由图 6、7 可以看出,在竖向力的作用下,2UPR-RPU 并联机构样机各元件所存储的应变能从大到小依次为杆件、UPR 分支中的 U 铰和 R 铰,即合理地提高杆件的刚度性能,如增大杆件的横截面积或选择刚度性能更好的材料,可以更有效地提高机构的刚度性能;UPR 分支 U 铰的 μ 最大值达到 0.25,说明此处 U 铰设计不合理,合理地改善 U 铰

的设计提高其刚度性能也是改善机构刚度性能的一个有效途径。图 8 给出了 μ_{ij} 在平面 $z = -600\text{ mm}$ 的分布,由图 8 可以看出, μ_{ij} 与机构的姿态密切相关。以上分析可知,机构的刚度性能不仅与铰链本身的刚度性能有关,还与铰链位置以及机构姿态有关。

为了研究外部载荷对全局应变能因子指标的影响,表 2 给出了在不同外部载荷作用下应变能因子指标在规则工作空间中的平均值。如果 $P = P_1$,则应变能主要存储在 UPR 分支的 U 铰链和杆件中,其占总应变能的 80%。RPU 分支杆件的全局应变能因子指标仅为 0.08,表明当沿着 Z 轴的力作用在移

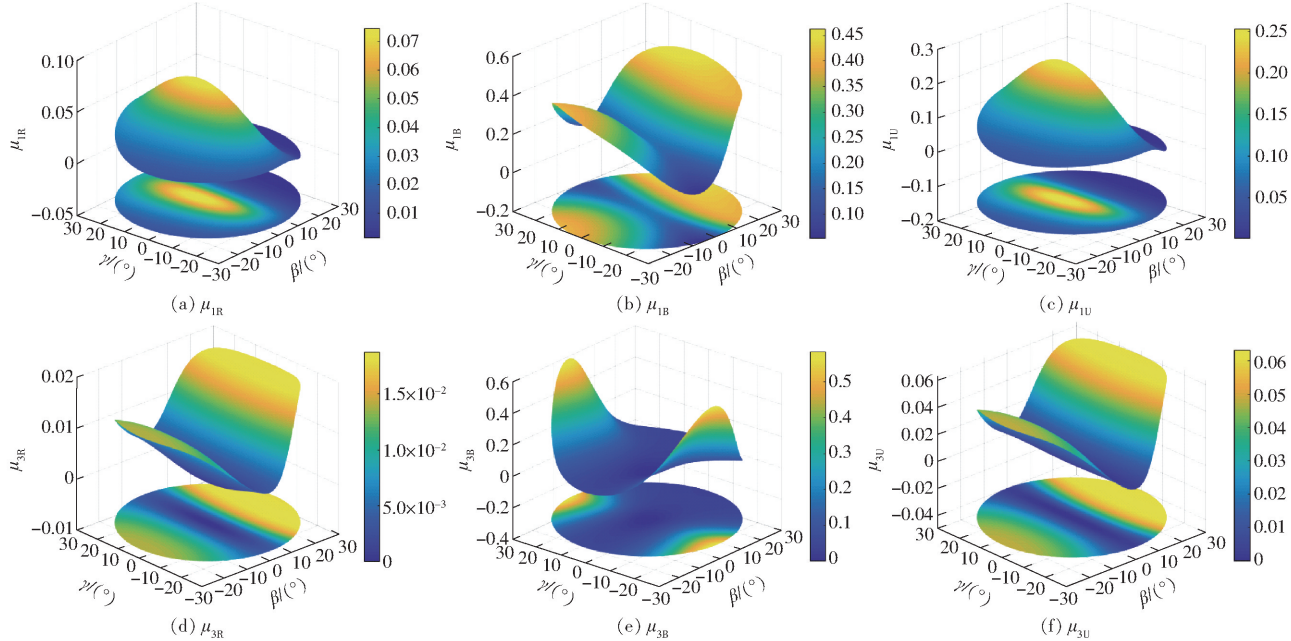


图 8 $P = P_1$ 时 μ 在平面 $z = -600\text{ mm}$ 的分布

Fig. 8 Distributions of μ of each elastic component in plane $z = -600\text{ mm}$ when $P = P_1$

动平台上时,第3个杆存储较小的应变能。也就是说第3个杆件对机构的刚度性能影响较小。当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2=(0.8\text{ N},0.3\text{ N},0.52\text{ N},0,0,0)$ 时,应变能主要储存在第3杆中,占总应变能的82.5%。在这种情况下,增加第3杆的截面面积可以更有效地提高机构的刚度性能。与其他弹性元件相比,UPR分支中R铰和U铰中存储的应变能可以忽略。第3分支铰链储存的应变能仅占1.51%。并且由于外部载荷的不对称,两个UPR分支中存储的应变能也不再相

同。图9给出了指定工作空间中3根杆件的全局应变能指标的分布图。当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_3=(0.52\text{ N},0.3\text{ N},0.8\text{ N},0.5\text{ N}\cdot\text{m},0.7\text{ N}\cdot\text{m},0.51\text{ N}\cdot\text{m})$ 时,第3杆储存的应变能占55.0%,第1杆和第2杆储存的应变能占41.0%。因为第3杆件此时具有较大的应变能量,给其设计较大的横截面面积是合理的。由于篇幅的限制,图10仅给出了3根杆的应变能因子指标分布。以上分析结果可知,关节对机构刚度性能的影响也与外部载荷的方向有关。

表 2 弹性元件在不同载荷作用下的全局应变能因子指标
Tab.2 Global μ of elastic component in prescribed workspace

外部载荷	$\bar{\mu}_{1R}$	$\bar{\mu}_{1B}$	$\bar{\mu}_{1U}$	$\bar{\mu}_{2R}$	$\bar{\mu}_{2B}$	$\bar{\mu}_{2U}$	$\bar{\mu}_{3R}$	$\bar{\mu}_{3B}$	$\bar{\mu}_{3U}$
$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1$	0.044	0.254	0.146	0.044	0.254	0.146	0.007	0.083	0.023
$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2$	1.39×10^{-4}	0.036	1.99×10^{-4}	9.55×10^{-4}	0.122	6.06×10^{-4}	0.007	0.825	0.008
$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_3$	0.002	0.216	0.003	0.004	0.194	0.011	0.007	0.550	0.012

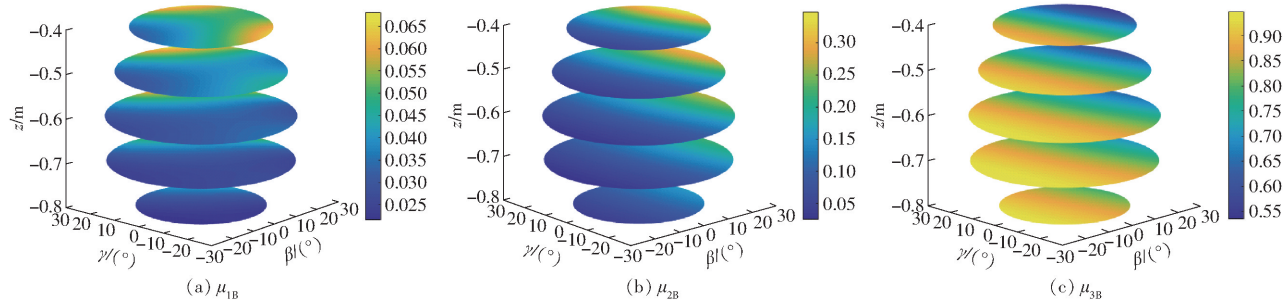


图 9 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2$ 时3个杆件的应变能指标分布图

Fig.9 Distributions of μ for three bars when $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2$

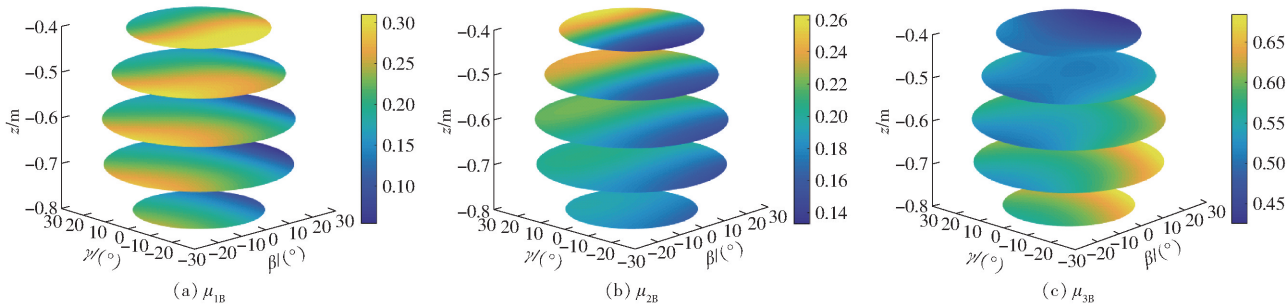


图 10 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_3$ 时3个杆件的应变能指标分布图

Fig.10 Distributions of μ for three bars when $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_3$

5 结论

(1)以2UPR-RPU过约束并联机构为研究对象,基于螺旋理论得出分支施加给动平台的驱动力和约束反力,基于材料力学和空间力系平移定理得到杆件和关节存储的应变能,利用应变能方法和卡氏第二定理得到形式紧凑的分支刚度矩阵,结合虚功原理和动平台平衡方程得到整体刚度矩阵的解析表达式,并同时得到驱动力和约束反力的解析表达式。与有限元模型计算结果的对比发现,误差不超

过7.8%,验证了本文理论模型的正确性。
(2)为了研究2UPR-RPU并联机构各弹性元件对机构刚度性能的贡献,定义了应变能因子指标,给出了其在规则工作空间的四维切片分布图像,结果表明,弹性元件对机构刚度性能的贡献不仅与弹性元件本身有关,而且与弹性元件的排列、机构的姿态以及外部载荷的方向有关;在机构的刚度性能评估中,关节的柔度不可忽略。应变能因子指标从应变能的角度定量评价了各弹性元件对机构刚度性能的影响程度,具有明确的物理意义。

参 考 文 献

- [1] MERLET J P. Parallel robots[M]. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [2] LUNG W, TSAI I. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators[M]. John Wiley & Sons, 1999.
- [3] ZHANG Jun, ZHAO Yanqin, JIN Yan. Kinetostatic-model-based stiffness analysis of Exechon PKM[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 36: 208 – 220.
- [4] WANG Hao, ZHANG Linsong, CHEN Genliang, et al. Parameter optimization of heavy-load parallel manipulator by introducing stiffness distribution evaluation index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 244 – 259.
- [5] PASHKEVICH A, KLIMCHIK A, CHABLAT D. Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(5): 662 – 679.
- [6] TAGHVAEIPOUR A, ANGELES J, LESSARD L. On the elastostatic analysis of mechanical systems[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 58(3): 202 – 216.
- [7] KLIMCHIK A, CHABLAT D, PASHKEVICH A. Stiffness modeling for perfect and non-perfect parallel manipulators under internal and external loadings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 79: 1 – 28.
- [8] WU Jun, WANG Jinsong, WANG Liping, et al. Study on the stiffness of a 5-DOF hybrid machine tool with actuation redundancy[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(2): 289 – 305.
- [9] DEBLAISE D, HERNOT X, MAAURINE P. A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006: 4213 – 4219.
- [10] KLIMCHIK A, PASHKEVICH A, CHABLAT D. Fundamentals of manipulator stiffness modeling using matrix structural analysis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 133: 365 – 394.
- [11] 许允斗, 姚建涛, 金林茹, 等. 考虑杆件空间复合弹性变形的过约束并联机构受力分析方法[J]. 机械工程学报, 2015, 51(7): 53 – 60.
- XU Yundou, YAO Jiantao, JIN Linru, et al. Method for force analysis of the overconstrained parallel mechanism considering the link's spatial composite elastic deformations[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(7): 53 – 60. (in Chinese)
- [12] 赵永生, 刘文兰, 许允斗, 等. 一种过约束并联机构受力的数值仿真分析方法[J]. 中国机械工程, 2015, 26(12): 1576 – 1583.
- ZHAO Yongsheng, LIU Wenlan, XU Yundou, et al. A numerical simulation method for force analysis of an overconstrained PM[J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(12): 1576 – 1583. (in Chinese)
- [13] 赵永生, 许允斗, 姚建涛, 等. 一种过约束并联机构受力分析的方法[J]. 中国机械工程, 2014, 25(6): 711 – 717.
- ZHAO Yongsheng, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. A force analysis method for overconstrained parallel mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(6): 711 – 717. (in Chinese)
- [14] XU Yundou, LIU Wenlan, YAO Jiantao, et al. A method for force analysis of the overconstrained lower mobility parallel mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 88: 31 – 48.
- [15] HU Bo, HUANG Zhen. Kinetostatic model of overconstrained lower mobility parallel manipulators[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(1): 309 – 322.
- [16] HU Bo. Kinematically identical manipulators for the Exechon parallel manipulator and their comparison study[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 103: 117 – 137.
- [17] HUANG Zhen, ZHAO Yan, LIU Jingfang. Kinetostatic analysis of 4-R(CRR) parallel manipulator with overconstraints via reciprocal-screw theory[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2010, 2: 1652 – 1660.
- [18] 汪满新, 谌秋生, 祖莉, 等. 计及重力的 3-RRS 并联机构静刚度分析[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(11): 392 – 402.
- WANG Manxin, CHEN Qiusheng, ZU Li, et al. Stiffness analysis of 3-RRS parallel mechanism with consideration of gravity[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(11): 392 – 402. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20181148&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2018.11.048. (in Chinese)
- [19] 徐东涛, 孙志礼, 于晓光. 考虑杆件弹性变形的改进型 Delta 并联机构刚度特性分析[J/OL]. 农业机械学报, 2013, 44(5): 294 – 298.
- XU Dongtao, SUN Zhili, YU Xiaoguang. Stiffness characteristic analysis of modified Delta parallel mechanism based on bars' elastic deformation[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(5): 294 – 298. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20130551&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.05.051. (in Chinese)
- [20] REZAEI A, AKBARZADEH A, AKBARZADEH M R. An investigation on stiffness of a 3-PSP spatial parallel mechanism with flexible moving platform using invariant form[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 51(5): 195 – 216.
- [21] REZAEI A, AKBARZADEH A. Position and stiffness analysis of a new asymmetric 2PRR-PPR parallel CNC machine[J]. Advanced Robotics, 2013, 27(2): 133 – 145.
- [22] YAN S J, ONG S K, NEE A Y C. Stiffness analysis of parallelogram-type parallel manipulators using a strain energy method[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 13 – 22.
- [23] YANG Chao, CHEN Qiaohong, TONG Junhua, et al. Elastostatic stiffness analysis of a 2PUR-PSR overconstrained parallel mechanism[J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2019, 20(4): 569 – 581.
- [24] GOSSELIN C. Stiffness mapping for parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377 – 382.
- [25] LIAN Binbin, SUN Tao, SONG Yimi, et al. Stiffness analysis and experiment of a novel 5-DoF parallel kinematic machine considering gravitational effects[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2015, 95: 82 – 96.
- [26] LIU Haitao, HUANG Tian, CHETWYND D G. Stiffness modeling of parallel mechanisms at limb and joint/link levels[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33(3): 734 – 741.
- [27] CAO Wena, DING Huafeng, ZHU Weiguo. Stiffness modeling of over-constrained parallel mechanisms under considering gravity and external payloads[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 135: 1 – 16.
- [28] 柴馨雪, 项济南, 李秦川. 2-UPR-RPU 并联机构奇异性分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 145 – 151.
- CHAI Xinxue, XIANG Ji'nan, LI Qinchuan. Singularity analysis of a 2-UPR-RPU parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 145 – 151. (in Chinese)
- [29] YANG Chao, LI Qinchuan, CHEN Qiaohong, et al. Elastostatic stiffness modeling of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 112: 58 – 74.